ත්‍රිකෝණමිතිය [කෝණයේ ඒකක පරිවර්තනය කරන්න]

$180^\circ = \pi \, rad$

$1^\circ = \frac{\pi}{180} \, rad$

① $60^\circ \longrightarrow 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3} rad$

② $\frac{\pi}{2} rad \rightarrow \frac{180}{2} = 90^\circ$

සයින	කොස	ටැන්
sin	cos	tan

$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

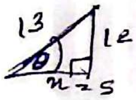
* ගැටලුවකදී එක් ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාතයක් දී ඇති විට ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත අගයන්

① කෝණය සුළු කෝණයක් නම්
- සෘජුකෝණී Δ ක් ඇඳ දී ඇති අනුපාතයට අනුව පාද ලකුණු කරගන්න
- පයිතගරස් ප්‍රමේයයෙන් ඉතිරි පාදය සොයන්න.

② සුළු කෝණයක් නොවේ නම්
- සර්වසාම්‍ය මගින් දී ඇති ලබාගන්න.
- වෘත්ත පාදක අනුව ලකුණු ලබාගන්න.

① $\sin\theta = \frac{12}{13}$ නම්, θ සුළු කෝණයක් $(0 < \theta < 90^\circ)$

$\cos\theta$, $\tan\theta$ සොයන්න.



$x^2 + 12^2 = 13^2$

$x^2 = 13^2 - 12^2$

$x^2 = (13-12)(13+12)$

$x^2 = 1 \times 25$

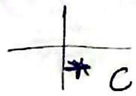
$x = 5$

$\therefore \cos\theta = \frac{5}{13}$

$\tan\theta = \frac{12}{5}$

② $\cot\theta = (-2)$, $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ නම්

$\sin\theta$, $\cos\theta$ සොයන්න



$\cos \rightarrow +$

$\sin \rightarrow (-)$

$\tan \rightarrow (-)$

$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

$1 + 4 = \csc^2\theta$

$\pm\sqrt{5} = \frac{1}{\sin\theta}$

$\sin\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

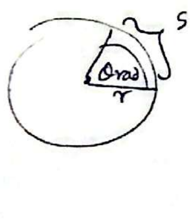
$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

$\therefore \sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{5}}$

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

වෘත්ත චාපයක දිග



$\boxed{S = r\theta}$

m/cm

වෘත්ත ඛණ්ඩයක වර්ගඵලය

$\boxed{A = \frac{1}{2}r^2\theta}$

m^2/cm^2

ත්‍රිකෝණමිතික සර්වසාම්‍ය ≡ සර්වසම සාධනය කිරීම.

① $L.H.S \rightarrow R.H.S$ / $R.H.S \rightarrow L.H.S$

② දෙපැත්තම සුළු කර දෙපැත්තම එකම උත්තරයකට ගෙන $L.H.S = R.H.S$ කිරීම

භාග සුළු කිරීම

① $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$

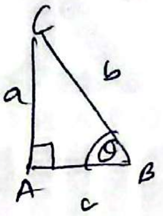
② $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$

③ $\frac{1}{a/b} = b/a$

④ $\frac{\frac{a^3}{b^5}}{\frac{c^4}{d^7}} = \frac{a^3 d^7}{b^5 c^4}$

⑥ $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{a}{c}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ සාධනය



$a^2 + c^2 = b^2$

L.H.S

$\sin^2\theta + \cos^2\theta$

$= \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{b^2}$

$= \frac{a^2 + c^2}{b^2}$

$= \frac{b^2}{b^2} = 1 = R.H.S$

වීජ ගණිතය

① ප්‍රසාරණය කිරීම

$(a \mp b)^2 = a^2 \mp 2ab + b^2$

$(a \mp b)^3 = a^3 \mp 3a^2b \pm 3ab^2 \mp b^3$

② සාධක සෙවීම

$(a^2 - b^2) = (a-b)(a+b)$

$(a^3 \mp b^3) = (a \mp b)(a^2 \pm ab \mp b^2)$

③ දර්ශක නියම

$a^m . a^n = a^{(m+n)}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

$(ab)^m = a^m b^m$

$(\frac{a}{n})^m = \frac{a^m}{n^m}$

දර්ශක → $\times \rightarrow +$, $\div \rightarrow (-)$, $\wedge \rightarrow \times$, $\sqrt{} \rightarrow \div$

$\sec\theta . \cos\theta = 1$

$\csc\theta . \sin\theta = 1$

$\tan\theta . \cot\theta = 1$

$\sec^2\theta . \cos^2\theta = 1$

$\sin^3\theta . \csc^3\theta = 1$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$

$1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ සාධනය

L.H.S

$1 + \tan^2\theta$

$= 1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$= \frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow \sec^2\theta = R.H.S$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

$1+\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$ සාධනය

LHS

$1+\cot^2\theta$

$= \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2\theta} = \operatorname{cosec}^2\theta$

$= RHS$

$1+\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

$\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1$

$(a^2+b^2) = (a+b)^2 - 2ab$

$-\sin, \cos$ වල දී

$(a^2+b^2) = (a-b)^2 + 2ab$

$-\sec, \tan$ හා $\operatorname{cosec}, \cot$ වල දී.

$x^4+y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2$

$x^4+y^4 = (x^2-y^2) + 2x^2y^2$

ඝාතාංකයක් 6 වතාවල ප්‍රකාශනයකදී ත්‍රිකෝණයේ 2 වතාවල හෝ 3 වතාවල ලෙස ලියන්න (හොඳ හෝ 2 වතාවල)

① $\sin^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$

LHS

$\sin^6\theta + \cos^6\theta \Rightarrow (\sin^2\theta)^3 + (\cos^2\theta)^3$

$\cancel{= (\sin^2\theta+\cos^2\theta)(1-\sin^2\theta\cos^2\theta)}$

$= (\sin^2\theta)^3 + (\cos^2\theta)^3$

$= (\sin^2\theta+\cos^2\theta)[\sin^4\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta + \cos^4\theta]$

$= (\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$

$= 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta = RHS$

ප්‍රතිබද්ධය

කරණීයක ප්‍රතිබද්ධයෙන් ගුණ කිරීම

$(a+b)$ හි ප්‍රතිබද්ධය $(a-b)$

$(a+b) \times$ ප්‍රතිබද්ධය $= (a+b)(a-b) = (a^2-b^2)$

① $\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ හරය පරිමේය කරන්න.

$\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})} \times \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{5-3}$

$= \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{2}$

- බොහෝ අවස්ථාවල සර්වසාම්‍ය ගැටලුවල දී ගණකය සුළුවන නොවන විට හරයේ හෝ ලවයේ ප්‍රතිබද්ධයෙන් ගුණ කිරීමෙන් සුළු කළ හැක (බොහෝ විට හරයේ ප්‍රතිබද්ධයෙන්)

පද තුනකින් සමන්විත ප්‍රකාශනයක ප්‍රතිබද්ධය පද දෙකක් 1ක් ලෙස සලකා සොයන්න

$(a+b+c)$ හි ප්‍රතිබද්ධය $[(a+b)-c]$

හෝ

$[a-(b+c)]$

② $\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} \equiv \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta$

LHS

$= \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \times \frac{(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)}}$

$= \frac{(1-\cos\theta)}{\sin\theta} \Rightarrow \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta$

③ $\frac{1+\cos\theta+\sin\theta}{1-\cos\theta+\sin\theta} \equiv \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

මෙහිදී හැකිතාක ප්‍රතිබද්ධය ලබා ගැනීමේදී හරයේ, ලවයේ ලකුණු මාරු කිරීමෙන් ගන්න

$\frac{(1+\cos\theta)+\sin\theta}{(1-\cos\theta)+\sin\theta} \times \frac{(1-\cos\theta)-\sin\theta}{(1-\cos\theta)-\sin\theta}$

$= \frac{[(1+\cos\theta)+\sin\theta][(1-\cos\theta)-\sin\theta]}{(1-\cos\theta)^2 - \sin^2\theta}$

$\downarrow$

RHS ✓

④ $\frac{\tan A+\sec A-1}{\tan A-\sec A+1} = \frac{1+\sin A}{\cos A}$

$\frac{(\tan A+\sec A)-1}{(\tan A-\sec A)+1} \times \frac{(\tan A-\sec A)-1}{(\tan A-\sec A)-1}$

$\downarrow$

RHS ✓

සංයුක්ත කෝණ ලබා ගැනීමට දැනීම දැරීම

① $(\tan\theta+\operatorname{cosec}\alpha)^2 - (\cot\alpha-\sec\theta)^2$

$= 2\tan\theta\cot\alpha(\operatorname{cosec}\theta+\sec\alpha)$

$= (\tan\theta+\operatorname{cosec}\alpha)^2 - (\cot\alpha-\sec\theta)^2$

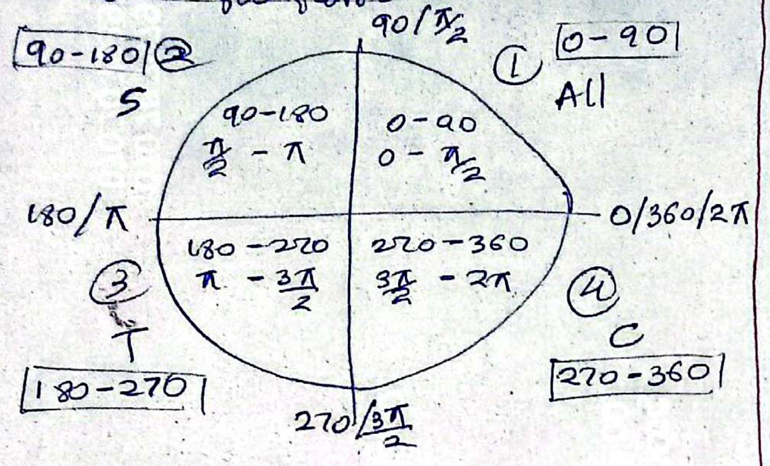
$\downarrow$

$= 2\tan\theta\operatorname{cosec}\alpha + 2\cot\alpha\sec\theta)$

$= 2\tan\theta\cot\alpha\left(\frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cot\alpha} + \frac{\sec\theta}{\tan\theta}\right)$

$= 2\tan\theta\cot\alpha(\sec\alpha + \operatorname{cosec}\theta)$

ඕනෑම කෝණයක් සඳහා ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත ලකුණු



ඕනෑම පාදක අනුපාත ඕනෑම කෝණයක ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත ලෙස

සූත්‍රය

① සෑම පාදකය අනුපාතයක ලකුණ

② පළමුව $90°$ හා $270°$ අක්ෂය වෙත් නම් ලබන විට

$\cos\theta \longrightarrow \sin\theta$	$\sin(90°-\theta) = \cos\theta$
$\sin\theta \longrightarrow \cos\theta$	$\cos(90°-\theta) = \sin\theta$
$\tan\theta \longrightarrow \cot\theta$	$\tan(90°-\theta) = \cot\theta$

③ $180°$ හා $360°$ නම් වෙනස් නැත

$\cos\theta \rightarrow \cos\theta$

$\sin\theta \longrightarrow \sin\theta$

$\tan\theta \rightarrow \tan\theta$

උදා: $\tan 300° = \tan(360°-60°)$ C

$= -\tan 60°$

$= -\sqrt{3}$

$\sec 330° = \dfrac{1}{\cos(360°-30°)}$ C

$= \dfrac{1}{+\cos 30}$

$= \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$\sin 3750 = \sin 150$ S A

$(3750-3600)$

$= 150$

$= \sin(180-30)$

$= \sin 30$

$= \frac{1}{2}$

(-) කෝණ

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = +\cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

$\csc(-\theta) = -\csc\theta$

$\sec(-\theta) = +\sec\theta$

$\cot(-\theta) = -\cot\theta$

උදා: $\sin -300 = -(\sin 300)$

$= -[\sin(360-60)]$ C

$= -[-\sin 60]$

$= \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(A+B) හා (A-B) සූත්‍ර

$\sin(A \pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B$

$\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \sin A\sin B$

$\tan(A \pm B) = \dfrac{(\tan A \pm \tan B)}{(1 \mp \tan A\tan B)}$

* $75°, 105°, 15°$ වැනි සම්මත නොවන කෝණවල ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත සෙවීම

(A+B) හා (A-B) සූත්‍ර භාවිතයෙන් සම්මත කෝණවල ආධාරයෙන් සොයාගත හැක

උදා: $\tan\frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{180}{12}\right) = \tan 15$

$= \tan 15$

$= \tan(60-45)$

$= \dfrac{\tan 60 - \tan 45}{1+\tan 60\tan 45}$

$= \dfrac{(\sqrt{3}-1)}{(1+\sqrt{3})} \times \dfrac{(1-\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})}$

$= \dfrac{\sqrt{3}-3-1+\sqrt{3}}{1-3} = 2-\sqrt{3}$

2A සූත්‍ර (ද්විත්ව සූත්‍ර / ද්විගුණ සූත්‍ර)

ඕනෑම කෝණයක් සඳහා ද්විගුණ කෝණ අනුපාත ලෙස

$\sin 2A = 2\sin A\cos A$

$\cos 2A = \begin{cases} 2\cos^2 A - 1 \\ 1-2\sin^2 A \\ \cos^2 A - \sin^2 A \end{cases}$

සාධනය කිරීම (A+B) සූත්‍රයෙන්

$\sin 2A$ සාධනය

$\sin 2A = \sin(A+A)$

$= \sin A\cos A + \cos A\sin A$

$= 2\sin A\cos A$

$\cos 2A$ සාධනය

$\cos 2A = \cos(A+A)$

$= \cos A\cos A - \sin A\sin A$

$= \cos^2 A - \sin^2 A$

$= \cos^2 A - (1-\cos^2 A)$ $\qquad$ $= (1-\sin^2 A) - \sin^2 A$

$= 2\cos^2 A - 1$ $\qquad$ $= 1-2\sin^2 A$

$\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

$\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ $\qquad$ $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

$\sin 2A = \dfrac{2t}{1+t^2}$ $\qquad$ $\tan 2A = \dfrac{2t}{1-t^2}$

$\cos 2A = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

2. ii) $\dfrac{1+\cos 2A}{1-\cos 2A} \equiv \cot^2 A$

LHS

$= \dfrac{1+\cos 2A}{1-\cos 2A} = \dfrac{\cancel{1}+2\cos^2 A\cancel{-1}}{\cancel{1}+2\sin^2 A\cancel{-1}}$

$= \dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = \cot^2 A$

* $\cos 2A$ සූත්‍රවලින් [illegible] (1) [illegible]
(1) [illegible]

2. ii) ① $\sin 8A \equiv 8\sin A\cos A\cdot\cos 2A\cdot\cos 4A$

RHS

$8\sin A\cos A\cdot\cos 2A\cdot\cos 4A$

$= 4\sin 2A\cos 2A\cdot\cos 4A$

$= 2\sin 4A\cos 4A$

$= \sin 8A = $ RHS

② $\sec^2 A(1+\sec 2A) = 2\sec 2A$

LHS

$\sec^2 A(1+\sec 2A)$

$= \sec^2 A\left(1+\dfrac{1}{\cos 2A}\right)$

$= \sec^2 A\left(\dfrac{\cos 2A+1}{\cos 2A}\right)$

$= \dfrac{\cancel{1}}{\cancel{\cos^2 A}}\times\dfrac{2\cancel{\cos^2 A}}{\cos 2A}$

$= 2\sec 2A = $ RHS

3A සූත්‍ර

* [illegible] $\frac{1}{3}$ [illegible]
[illegible]

$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

$\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

[illegible] (A+B) සූත්‍ර [illegible]

$\sin 3A$ [illegible]

$\sin 3A = \sin(2A+A)$

$= \sin 2A\cos A + \cos 2A\sin A$

$= 2\sin A\cos A\cos A + (1-2\sin^2 A)\sin A$

$= 2\sin A(1-\sin^2 A) + \sin A - 2\sin^3 A$

$= 3\sin A - 4\sin^3 A$

$=$ RHS

① $2[\cos^4 A + \sin^4 A] = 1+\cos^2 2A$

LHS

$2[\cos^4 A+\sin^4 A]$

$= 2[(\cos^2 A)^2 + (\sin^2 A)^2]$

$= 2[(\cos^2 A+\sin^2 A)^2 - 2\cos^2 A\sin^2 A]$

$= 2(1-2\cos^2 A\sin^2 A)$

~~$= 2-(2\sin A\cos A)\sin A\cos A$~~

~~$= 2-\sin 2A\cdot\sin A\cos A$~~

~~$= 2[1-\cos^2 A(1-\cos^2 A)]$~~

~~$= 2[1-\cos^2 A+\cos^4 A]$~~

~~$= 2[\cos^2 A - 1]^2$~~

~~$= 2-4\cos^2 A\sin^2 A$~~

~~$= 2-\dfrac{4\cos^2 A\sin^2 A}{2}$~~

~~$= 2-\dfrac{(\sin 2A)^2}{2}$~~

~~$= 2-\dfrac{(1-\cos 2A)}{2}$~~

$= 2(1-2\cos^2 A\sin^2 A)$

$= 2-4\cos^2 A\sin^2 A$

$= 2-(\sin 2A)^2$

$= 2-(1-\cos^2 2A)$

$= 2-1+\cos^2 2A$

$= 1+\cos^2 2A = $ RHS

② $\left[\dfrac{1}{\operatorname{cosec} A-\cot A} - \dfrac{1}{\sin A}\right] = \left(\dfrac{1}{\sin A} - \dfrac{1}{\operatorname{cosec} A+\cot A}\right)$

[illegible] model [illegible]

LHS

$\dfrac{1}{\operatorname{cosec} A-\cot A} - \dfrac{1}{\sin A}$

$= \dfrac{\operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A}{\operatorname{cosec} A-\cot A} - \dfrac{1}{\sin A}$

$= \dfrac{(\operatorname{cosec} A+\cot A)}{1} - \dfrac{1}{\sin A}$

~~$\dfrac{(\operatorname{cosec} A+\cot A)}{(\operatorname{cosec}^2 A+\cot^2 A)} - \dfrac{1}{\sin A}$~~

~~$= \dfrac{\sin A(\operatorname{cosec} A+\cot A)-(\operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A)}{\sin A(\operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A)}$~~

~~$= \dfrac{\sin A-(\operatorname{cosec} A-\cot A)}{\sin A(\operatorname{cosec} A-\cot A)}$~~

~~$= \dfrac{\sin A}{\sin A(\operatorname{cosec} A-\cot A)}$~~

$= \csc A + \cot A - \frac{1}{\sin A}$) *

$= \frac{1}{\sin A} - \frac{(\cot A + \csc A)}{1}$

$= \frac{1}{\sin A} - \frac{1}{(\cot A + \csc A)}$

$= \frac{1}{\sin A} - \frac{1}{(\csc A + \cot A)}$

C + D සහ C − D සූත්‍ර
(එකතුව සහ අන්තර සූත්‍ර)

* 2A සූත්‍රවලට අදාළ ... [illegible]

$\sin C + \sin D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$

$\sin C - \sin D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$

$\cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$

$\cos C - \cos D = -2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$

① $\frac{\cos 2A - \cos 3A}{\sin 2A + \sin 3A} = \tan(A/2)$

* [illegible] A [illegible] sin [illegible] cos

LHS

$\frac{\cos 2A - \cos 3A}{\sin 2A + \sin 3A}$

$= \frac{-\cancel{2}\cancel{\sin\left(\frac{5A}{2}\right)}\sin\left(-\frac{A}{2}\right)}{\cancel{2}\cancel{\sin\left(\frac{5A}{2}\right)}\cos\left(-\frac{A}{2}\right)}$

$= \frac{-\left[-\left(\sin\frac{A}{2}\right)\right]}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{\sin A/2}{\cos A/2} = \tan A/2 = \text{RHS}$

② $\frac{\cos A + \cos 3A + \cos 5A + \cos 7A}{\sin A + \sin 3A + \sin 5A + \sin 7A} = \cot 4A$

* [illegible] cos 4A [illegible] sin 4A [illegible]

~~LHS~~

$\frac{\cos A + \cos 3A + \cos 5A + \cos 7A}{\sin A + \sin 3A + \sin 5A + \sin 7A}$

$= \frac{2\cos(4A)\cos(-3A) + 2\cos(4A)\cos(-A)}{2\sin(4A)\cos(-3A) + 2\sin(4A)\cos(-A)}$

LHS

$\frac{\cos A + \cos 3A + \cos 5A + \cos 7A}{\sin A + \sin 3A + \sin 5A + \sin 7A}$

$= \frac{\cancel{2}\cos(2A)\cancel{\cos(-A)} + \cancel{2}\cos(6A)\cancel{\cos(-A)}}{\cancel{2}\sin(2A)\cancel{\cos(-A)} + \cancel{2}\sin(6A)\cancel{\cos(-A)}}$

$= \frac{\cos 2A + \cos 6A}{\sin 2A + \sin 6A} \Rightarrow \frac{\cancel{2}\cos(4A)\cancel{\cos(-2A)}}{\cancel{2}\sin(4A)\cancel{\cos(-2A)}}$

$= \frac{\cos 4A}{\sin 4A} = \cot 4A$

C + D සහ C − D සූත්‍රවල විලෝමය

* sin, cos පදවල ගුණිතයක් ඇතිවිට ඒවා කෝණවල එකතුව අන්තරයක් ලෙස ලිවීම

$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

$2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

$2\cos A\cos B = \cos(A+B) - \cos(A-B)$

$2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

① $\sin A\sin(60-A)\sin(60+A) = \frac{1}{4}\sin 3A$

LHS

$\sin A\sin(60-A)\sin(60+A)$

$= \sin A[\sin 60\cos A - \cos 60\sin A][\sin 60\cos A + \cos 60\sin A]$

$= \sin A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A - \frac{1}{2}\sin A\right)\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A + \frac{1}{2}\sin A\right]$

$= \sin A\left[\frac{3}{4}\cos^2 A - \frac{1}{4}\sin^2 A\right]$

$= \frac{1}{4}[3\cos^2 A\sin A - \sin^3 A]$

$= \frac{1}{4}[3\sin A(1-\sin^2 A) - \sin^3 A]$

$= \frac{1}{4}[3\sin A - 4\sin^3 A]$

$= \frac{1}{4}\sin 3A = \text{RHS}$

θ ඉවත් කිරීම ආශ්‍රිත ගැටළු

① $\sin\theta + y = x$
$\cos\theta - y = x$ නම්, $x^2 + y^2 = 1/2$ බව පෙන්වන්න.

$\sin\theta + y = x$ — ①
$\cos\theta - y = x$ — ②

①/ $\sin\theta = (x-y)$ ②/ $\cos\theta = (x+y)$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$(x-y)^2 + (x+y)^2 = 1$

$x^2 - \cancel{2xy} + y^2 + x^2 + \cancel{2xy} + y^2 = 1$

$2x^2 + 2y^2 = 1$

$x^2 + y^2 = 1/2$

* සමීකරණ [illegible] θ [illegible]

සෘජුකෝණයට වඩා විශාල කෝණවල ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත සුළු කෝණයක ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කිරීම

① $\sin\frac{7\pi}{8} = \sin\left(\pi - \frac{1}{8}\pi\right)$ S | A

$= \sin\frac{1}{8}\pi \Rightarrow \sin\frac{\pi}{8}$

② $\cos\frac{8\pi}{7} = \cos\left(\pi + \frac{1}{7}\pi\right)$ S | A T

$= -\cos\frac{\pi}{7}$

ත්‍රිකෝණමිතික සර්වසාම්‍යයන් ද භාවිතයෙන් සුළු කෝණයන්ගේ අගය සොයා ගැනීමට 3 වන සර්වසාම්‍යයට අගය ආදේශ කිරීමෙන් ලැබේ.

① $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \cot\frac{\theta}{2}$ බව පෙන්වන්න. එනයින් $\cot\frac{\pi}{12}$ අගය සොයන්න.

LHS

$\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$

|

= RHS

$\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \cot\frac{\theta}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ ආදේශයෙන්

$\operatorname{cosec}\frac{\pi}{6} + \cot\frac{\pi}{6} = \cot\frac{\pi}{12}$

$\cot\frac{\pi}{12} = 2+\sqrt{3}$ //

ප්‍රතිලෝම ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිත

* මෙමඟින් කෝණයක් සංකේතනය කෙරේ.

උදා : $\tan\theta = 5$

$\theta = \tan^{-1}(5)$

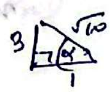
① $\sin(\tan^{-1}3 + \tan^{-1}2)$ අගය සොයන්න.

$$\sin(\underbrace{\tan^{-1}3}_{\alpha} + \underbrace{\tan^{-1}2}_{\beta})$$

$\tan\alpha = 3$

$\tan\beta = 2$

$= \sin(\alpha+\beta)$



$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\frac{3}{\sqrt{10}} \times \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{10}} \times \frac{2}{\sqrt{5}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$

② $\cos[2\underbrace{\cos^{-1}\tfrac{3}{5}}_{\alpha}]$ අගය සොයන්න

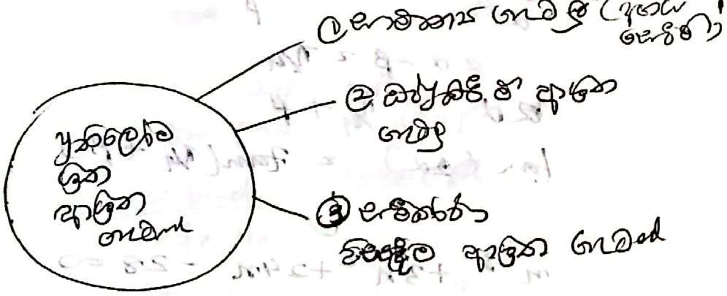
$\cos\alpha = \frac{3}{5}$

$\cos(2\alpha)$

$= 2\cos^2\alpha - 1$

$= 2 \times \frac{9}{25} - 1$

$= -\frac{7}{25}$



② සර්වසාම්‍ය ආශ්‍රිත ගැටලු

③ $\tan^{-1}\frac{1}{9} = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\frac{4}{5}$ බව

සාධු මාර්ගය

$$\underbrace{\tan^{-1}\tfrac{1}{9}}_{\alpha} + \underbrace{\tan^{-1}\tfrac{4}{5}}_{\beta} = \frac{\pi}{4} \text{ බව}$$

$= \alpha + \beta$

$= \tan(\alpha+\beta)$

$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

$= \frac{\frac{1}{9} + \frac{4}{5}}{1 - \frac{1}{9} \times \frac{4}{5}} \Rightarrow \tan(\alpha+\beta) = 1$

$(\alpha+\beta) = \frac{\pi}{4}$

④ $\cos^{-1}(4/5) + \tan^{-1}(3/5)$ ක

$$\underbrace{\cos^{-1}\left(\tfrac{4}{5}\right)}_{\alpha} + \underbrace{\tan^{-1}\left(\tfrac{3}{5}\right)}_{\beta} = \tan^{-1}\left(\tfrac{27}{11}\right)$$

$\cos\alpha = 4/5$

$= \alpha + \beta$

$= \tan(\alpha+\beta)$

ප්‍රතිලෝම කෝණයට අදාළ tan, cos, sin දැනගත්, $\tan\alpha = \frac{3}{4}$

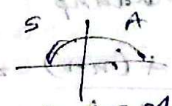
$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

$= \frac{3/4 + 3/5}{1 - 3/4 \cdot 3/5}$

$\tan(\alpha+\beta) = 27/11$

$(\alpha+\beta) = \tan^{-1}(27/11)$

⑤ $\pi - \underbrace{\cos^{-1}x}_{\alpha} = \cos^{-1}(-x)$ බව.



$\cos\alpha = x$

$= \pi - \alpha$

$= \cos(\pi - \alpha)$

$= -\cos\alpha$

$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$

$\cos(\pi-\alpha) = -x$

$(\pi-\alpha) = \cos^{-1}(-x)$

⑥ $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{3}{5}$ බව

මෙම ගැටළුවලදී L.H.S, R.H.S වෙන වෙනම සොයා, දෙපැත්ත සමාන බව පෙන්වන්න.

③ [illegible]

① $\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \tan^{-1}2$ [illegible]

[illegible]

$\underbrace{\tan^{-1}(x+1)}_{\alpha} + \underbrace{\tan^{-1}(x-1)}_{\beta} = \underbrace{\tan^{-1}2}_{\gamma}$

$\tan\alpha = (x+1)$
$\tan\beta = (x-1)$
$\tan\gamma = 2$

$\alpha+\beta = \gamma$

$\tan(\alpha+\beta) = \tan\gamma$

$\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \tan\gamma$

$\frac{(x+1)+(x-1)}{1-(x^2-1)} = 2$

$2x = 4 - 2x^2$

$2x^2+2x-4=0$
$x^2+x-2=0$

$x=(-2)$ හෝ $x=1$

② $\underbrace{\tan^{-1}x}_{\alpha} + \underbrace{\tan^{-1}\frac{x}{2}}_{\beta} + \underbrace{\tan^{-1}\frac{x}{3}}_{\gamma} = \frac{\pi}{2}$

[illegible]

$\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}$

$\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}-\gamma$

$\tan(\alpha+\beta) = \tan(\frac{\pi}{2}-\gamma)$

$\tan(90-\theta)$
$\cot\gamma$

$\frac{x+\frac{x}{2}}{1-\frac{x^2}{2}} = \cot\gamma$

$x^2=1$
$x = \pm 1$

$x=1$ හෝ $\cancel{x=(-1)}$

$x=1$ [illegible]

$x\,(-)$ ට

$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}(x)$
[illegible] tan [illegible] (+) [illegible] $(-x)$ [illegible]

④ $\underbrace{2\tan^{-1}x}_{2\alpha} + \underbrace{\tan^{-1}(x+1)}_{\beta} = \frac{\pi}{2}$

$2\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$

$2\alpha = \frac{\pi}{2}-\beta$

$\tan(2\alpha) = \tan(\frac{\pi}{2}-\beta)$

$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \cot\beta$

$x=\frac{1}{3}$ හෝ $\cancel{x=(-1)}$

$x=\frac{1}{3}$

④ $\underbrace{\tan^{-1}\frac{1}{3}}_{\alpha} + \underbrace{\tan^{-1}\frac{1}{3}}_{\beta} = \underbrace{\sin^{-1}x}_{\gamma}$

$\alpha+\beta = \gamma$

R.H.S sin [illegible]

$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\gamma)$

⑤ $2\tan^{-1}(\frac{x}{2}) - \tan^{-1}(\frac{x}{2}) = \frac{\pi}{4}$
[illegible] 1 [illegible]

$\underbrace{2\tan^{-1}(\frac{x}{2})}_{\alpha} - \underbrace{\tan^{-1}(\frac{x}{2})}_{\beta} = \frac{\pi}{4}$

$2\alpha-\beta = \frac{\pi}{4}$

$2\alpha = \frac{\pi}{4}+\beta$

$\tan(2\alpha) = \tan(\frac{\pi}{4}+\beta)$

$x^3+3x^2+24x-28=0$

[illegible]

$(x-1)(x^2+4x+28)=0$

$(x-1)=0$ හෝ $(x^2+4x+28)=0$

$x=1$

$\Delta = b^2-4ac$
$= 16-4.28$
$\Delta = (-)$
$\therefore$ [illegible]

$\therefore x=1$

[illegible]

[illegible] ($\because$ [illegible] x^2 [illegible])

2 [illegible] $\underbrace{\mathrm{cosec}^{-1}x}_{\alpha} = 2\underbrace{\cot^{-1}7}_{\beta} + \underbrace{\cos^{-1}(\frac{3}{5})}_{\gamma}$

$\alpha = 2\beta+\gamma$

$\sin(\alpha) = \sin(2\beta+\gamma)$

ප්‍රතිලෝම ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිතවල ප්‍රධාන

$\boxed{01}$ ප්‍රතිලෝම ත්‍රිකෝණ (-) ගුණයට

$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}x$

$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$

$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$

$\boxed{02}$

$\operatorname{cosec}^{-1}x = \sin^{-1}(1/x)$

$\sec^{-1}x = \cos^{-1}(1/x)$

$\cot^{-1}x = \tan^{-1}(1/x)$

$\boxed{03}$

$\tan^{-1}[\tan x] = x$

$\sin^{-1}[\sin x] = x$

$\cos^{-1}[\cos x] = x$

$\boxed{04}$ ප්‍රධාන පරාසයන්

$\sin^{-1}$ හි ප්‍රධාන පරාසය $= [-\pi/2, \pi/2]$

$\tan^{-1}$ හි ප්‍රධාන පරාසය $= [-\pi/2, \pi/2]$

$\cos^{-1}$ හි ප්‍රධාන පරාසය $= [0, \pi]$

① $\underbrace{2\tan^{-1}(\sin x)}_{\cancel{\alpha}} = \underbrace{\tan^{-1}(2\sec x)}_{\beta}$

$2\alpha = \beta$

$\tan(2\alpha) = \tan\beta$

$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \quad 2\sec x$

$\frac{2\sin x}{1-\sin^2 x} = \frac{2}{\cos x}$

$\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}$ ＊ගොඩක්ම මෙහි x ප්‍රකාශනයන්

$\sin x\cos x = \cos^2 x$

$\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$

$\cos x(\sin x - \cos x) = 0$

$\cos x = 0$ හෝ $\sin x - \cos x = 0$

$\cos x = \cos\frac{\pi}{2}$ $\quad \sin x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$

$x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$ $\quad x = n\pi + (-1)^n[\frac{\pi}{2} - x]$

$x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{2} - (-1)^n x$

② $\tan[\underbrace{\cos^{-1}x}_{\alpha}] = \sin[\underbrace{\cot^{-1}\tfrac{1}{2}}_{\beta}]$

$\tan\alpha = \sin\beta$ | $\cos\alpha = x$, $\cot\beta = \frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sqrt{5}\sqrt{1-x^2} = 2x$

දෙපැත්තම වර්ග කරමු.

$5(1-x^2)^2 = 4x^2$

$x = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

＊ප්‍රතිලෝම ත්‍රිකෝණ ශ්‍රිත ප්‍රකාශන
ඇති සමීකරණ විසඳීමේදී ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිත
ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිත බවට හරවන
ප්‍රකාශනයන්
එසේ නොහැකි නම් මෙය ආදේශ
2A, 3A සූත්‍ර භාවිතය.
එකම කෝණ වලට හරවන්න tan, sin, cos ආදිය.

③ $\tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = 5\frac{\pi}{2}$

$x \to \tan\theta$

$\tan^{-1}\left(\frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right) = 5\pi/4$

$\tan^{-1}(\tan 3\theta) + \tan^{-1}(\tan 2\theta) = 5\pi/4$

$3\theta + 2\theta = 5\pi/4$

$\cancel{5}\theta = \cancel{5}\pi/4$

$x =$

$A + B + C = 180°$ $(A + B + C = \pi)$ | $(A+B) = 180 - C$, $A = 180 - (B+C)$

ප්‍රත්‍යක්ෂ සනාථ කිරීම

① sin, cos වල එකතුව වල ප්‍රකාශ කරමු

② sin, cos වල ගුණිතයන් ප්‍රකාශ කරමු

③ tan, cot ආදී පදයන් ප්‍රකාශ කරමු

① Sin, cos වල [illegible] අන්තර [illegible]

* ■C + ■D , ■C − ■D සූත්‍ර භාවිතයෙන්

* 2θ (කෝණ ද්විගුණ) භාවිතයෙන්

① sin, cos සූත්‍ර භාවිත කොට සාධනය කරමු

- C + D සූත්‍ර භාවිතයෙන්.
- $A+B+C=180$
  $(A+B)=(180-C)$ ලෙසත්.
- $C=[180-(A+B)]$ ලෙසත්.

උදා: $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C$

LHS

$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C$

$=2\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos 2C$

$=2\cos(180-C)\cos(A-B)+\cos 2C$

$=-2\cos C\cos(A-B)+(2\cos^2 C-1)$

$=2\cos C[-\cos(A-B)+\cos C]-1$

$=-1-2\cos C(\cos(A-B)-\cos C]$

$=-1-2\cos C(\cos(A-B)-\cos(180-(A+B))]$

$=-1-2\cos C(\cos(A-B)+\cos(A+B)]$

$=-1-2\cos C(2\cos A\cos B)$

$=1-4\cos A\cos B\cos C$

$=$ RHS

උදා: $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

LHS

- $A+B+C=180$
  $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90^\circ$

$\sin A+\sin B-\sin C$

$=2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-\sin C$

$=2\sin\left(90-\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)-2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$=2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)-\sin\frac{C}{2}\right]$

$=2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)-\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)\right]$

$=2\cos\frac{C}{2}\left[+2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\right]$

$=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$=$ RHS

② sin, cos වල දෙවන බලය ආදේශ කරමු

- 2A සූත්‍ර භාවිතයෙන්.
  - $\cos^2 A$, $\sin^2 A$ ද $\cos 2A$ ඇසුරින් ලිවීම.

- $\cos 2A=2\cos^2 A-1$

$$\boxed{\cos^2 A=\left(\frac{\cos 2A+1}{2}\right)}$$

- $\cos 2A=1-2\sin^2 A$

$\sin^2 A=\frac{-(\cos 2A-1)}{2}$

$$\boxed{\sin^2 A=\left(\frac{1-\cos 2A}{2}\right)}$$

- ඉහත ① ආකාරයට $A+B+C=180$ ආකාරය ගන්න.

උදා: $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$

LHS

$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C$

$=\left(\frac{1-\cos 2A}{2}\right)+\left(\frac{1-\cos 2B}{2}\right)+\left(\frac{1-\cos 2C}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left[3-[\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C]\right]$

$=\frac{1}{2}\left[3-(2\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos 2C]\right]$

$=\frac{1}{2}\left[3-(-2\cos C\cos(A-B)+2\cos^2 C-1)\right]$

$=\frac{1}{2}\left[4+2\cos C[\cos(A-B)-\cos C]\right]$

$=\frac{1}{2}\left(4+2\cos C[\cos(A-B)+\cos(A+B)]\right)$

$=\frac{1}{2}\left[4+2\cos C[2\cos A\cos B]\right]$

$=2+2\cos A\cos B\cos C$

$=$ RHS

③ tan, cot වූ ගැටළුවල අනන්‍යතාවය

- සාමාන්‍යයෙන් LHS හෝ RHS සුළු කළ යුතුය.
- $A+B+C=180^\circ$ දුන් විට ප්‍රකාශනයේ කෝණ දෙක එකතුව ගෙන දෙපසටම tan යොදන්න. cot යොදන්න
- පිළිතුර දෙන ලෙස සුළු කරන්න.

7.ප්‍ර $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}$

$\equiv 1$ බව පෙන්වන්න

ප්‍රකාශනය උත්තරයේ සිට ගනිමු.

$$A+B+C=\pi$$

$$\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$$

$$\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$$

$$\frac{\tan\left(\frac{A}{2}\right)+\tan\left(\frac{B}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{B}{2}\right)}=\cot\frac{C}{2}$$

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right)+\tan\left(\frac{B}{2}\right)=\frac{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{C}{2}}$$

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1$$

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$$

$$\frac{\cos A}{1 \pm \sin A} = \tan\left(45^\circ \pm A/2\right)$$

RHS $\tan\left[45^\circ \pm A/2\right]$

(+)

$$\tan\left(45^\circ + A/2\right)$$

$$= \frac{\sin(45^\circ + A/2)}{\cos(45^\circ + A/2)}$$

$$= \frac{\sin 45 \cos A/2 + \cos 45^\circ \sin A/2}{\cos 45^\circ \cos A/2 - \sin 45 \sin A/2}$$

$$= \frac{\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cos A/2 + \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sin A/2}{\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cos A/2 - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sin A/2}$$

$$= \frac{\cos A/2 + \sin A/2}{\cos A/2 - \sin A/2} \times \frac{(\cos A/2 + \sin A/2)}{(\cos A/2 + \sin A/2)}$$

$$= \frac{\cos^2 A/2 + 2\cos A/2 \sin A/2 + \sin^2 A/2}{\cos^2 A/2 - \sin^2 A/2}$$

$$= \frac{1 + \sin A}{\cos A} \times \frac{\cos A}{\cos A}$$

$$= \frac{\cos A (1 + \sin A)}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{\cos A \cancel{(1 + \sin A)}}{\cancel{(1 + \sin A)}(1 - \sin A)}$$

$$= \frac{\cos A}{(1 - \sin A)}$$

$$= \frac{\cos A/2 + \sin A/2}{\cos A/2 - \sin A/2} \times \frac{(\cos A/2 - \sin A/2)}{(\cos A/2 - \sin A/2)}$$

$$= \frac{\cos^2 A/2 - \sin^2 A/2}{\cos^2 A/2 - 2\cos A/2 \sin A/2 + \sin^2 A/2}$$

$$= \frac{\cos 2A}{1 - \sin 2A} \;//$$

(−)

$$\tan\left[45^\circ - A/2\right]$$

$$= \frac{\sin(45^\circ - A/2)}{\cos(45^\circ - A/2)}$$

$$= \frac{\cancel{\sin 45^\circ} \cos A/2 - \cancel{\cos 45^\circ} \sin A/2}{\cancel{\cos 45^\circ} \cos A/2 + \cancel{\sin 45^\circ} \sin A/2}$$

$$= \frac{\cos A/2 - \sin A/2}{\cos A/2 + \sin A/2} \times \frac{(\cos A/2 + \sin A/2)}{(\cos A/2 + \sin A/2)}$$

$$= \frac{\cos^2 A/2 - \sin^2 A/2}{\cos^2 A/2 + 2\cos A/2 \sin A/2 + \sin^2 A/2}$$

$$= \frac{\cos A}{1 + \sin A} \;//$$

$\cos\alpha \cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha) = \frac{1}{4}\cos 3\alpha$

$\cos\alpha \cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)$

$= \frac{\cos\alpha}{2}\left[2\cos(60^\circ+\alpha)\cos(60^\circ-\alpha)\right]$

$= \frac{\cos\alpha}{2}\left[\cos 120^\circ + \cos 2\alpha\right]$

$= \frac{\cos\alpha}{2}\left[-\frac{1}{2} + \cos 2\alpha\right]$

$= \frac{\cos\alpha}{2}\left[-\frac{1}{2} + 2\cos^2\alpha - 1\right]$

$= \frac{2\times 2\cos^3\alpha}{2\times 2} - \frac{3\cos\alpha}{4}$

$= \frac{1}{4}\left[4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\right]$

$= \frac{1}{4}\cos 3\alpha$

$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{16}$

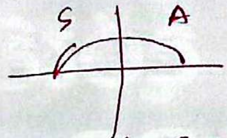
$= \frac{1}{2}\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$

$= \frac{1}{2}\,\frac{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ}$

$= \frac{1}{2}\,\frac{2\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80}{4\sin 20}$

$= \frac{1}{2}\,\frac{2\sin 80\cos 80}{8\sin 20}$

$= \frac{1}{16}\,\frac{\sin 160}{\sin 20}$



$\sin(180^\circ - 20^\circ)$
$= \sin 20$

$= \frac{1}{16}\,\frac{\cancel{\sin 20}}{\cancel{\sin 20}}$

$= \frac{1}{16}$

$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ(\sin 40^\circ \sin 80^\circ)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ\,\frac{1}{2}\left[-2\sin 80\sin 40^\circ\right]$

$80\times 2 \to 160^\circ$, $40\times 2 \to 80$
$(120+40)\,(120-40)$
$A = 120$
$B = 40$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ\,\frac{1}{(-2)}\left[\cos(120) - \cos 40\right]$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\sin 20^\circ}{(-2)}\left[-\frac{1}{2} - \cos 40\right]$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\sin 20}{2}\left[\frac{1}{2} + \cos 40\right]$

$= \frac{\sqrt{3}}{8}\left[\sin 20 + 2\sin 20\cos 40\right]$

$= \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20 + \frac{\sqrt{3}}{8}\left[2\sin 20\cos 40\right]$

$\left[2\cos 40\sin 20\right]$

$20\times 2 \to 40$, $40\times 2 \to 80$
$(60-20)\,(60+20)$
$A = 60$
$B = 20$

$= \cancel{\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 20} + \frac{\sqrt{3}}{8}\left[\sin 60 \cancel{- \sin 20}\right]$

$= \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 60$

$= \frac{\sqrt{3}}{8}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{3}{16}$

$$\frac{\cos A}{1 \pm \sin A} = \tan\left[45^\circ \pm \frac{A}{2}\right]$$

$$\frac{\cos A}{1 \pm \sin A}$$

$$= \frac{\cos^2(A/2) - \sin^2(A/2)}{\sin^2 A/2 + \cos^2 A/2 \pm 2\sin A/2 \cos A/2}$$

$$= \frac{[\cos A/2 + \sin A/2][\cos A/2 - \sin A/2]}{\sin^2 A/2 \pm 2\sin A/2 \cos A/2 + \cos^2 A/2}$$

$$= \frac{\cos A/2 \pm \sin A/2}{\cos A/2 \pm \sin A/2}$$

$$= \frac{\cos A/2 \pm \sin A/2}{\cos A/2}$$

$$\tan 2A = (\sec 2A + 1)\sqrt{\sec^2 A - 1}$$

R.H.S

$$(\sec 2A + 1)\sqrt{\sec^2 A - 1}$$

$$= \left(\frac{1 + \cos 2A}{\cos 2A}\right) \times \tan A$$

$$= \frac{1 + \cos 2A}{\cos 2A} \times \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$= \frac{\cancel{1} + 2\cos^2 A \cancel{- 1}}{\cos 2A} \times \frac{\sin A}{\cancel{\cos A}}$$

$$= \frac{2\sin A \cos A}{\cos 2A}$$

$\sin 2A = 2\sin A \cos A$

$2\sin A = \sin$

$$= \frac{\sin 2A}{\cos A} \times \frac{1}{\cos 2A}$$

$$= \frac{\sin 2A}{\cos 2A} = \tan 2A$$

[illegible] model එක

$$\frac{1}{\operatorname{cosec} A - \cot A} - \frac{1}{\sin A} = \frac{1}{\sin A} - \frac{1}{(\operatorname{cosec} A + \cot A)}$$

L.H.S

$$\frac{1}{\operatorname{cosec} A - \cot A} - \frac{1}{\sin A}$$

$$= \frac{(\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A)}{\operatorname{cosec} A - \cot A} - \operatorname{cosec} A$$

$$= (\operatorname{cosec} A + \cot A) - \operatorname{cosec} A$$

$$\operatorname{cosec} A + (\cot A - \operatorname{cosec} A)$$

$$= \frac{1}{\sin A} + \frac{(\cot A - \operatorname{cosec} A)}{1}$$

$$= \frac{1}{\sin A} + \frac{(\cot A - \operatorname{cosec} A)}{(\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A)}$$

$$= \frac{1}{\sin A} - \frac{1}{(\operatorname{cosec} A + \cot A)}$$

$$\frac{\tan\theta - \sec\theta - 1}{\tan\theta + \sec\theta + 1} = \tan\theta - \sec\theta$$

$$= \frac{\tan\theta - 1 - \sec\theta}{\tan\theta + \sec\theta + 1} \times \frac{(\tan\theta - 1 + \sec\theta)}{(\tan\theta + \sec\theta - 1)}$$

$$= \frac{(\tan\theta - 1)^2 - \sec^2\theta}{(\tan\theta + \sec\theta)^2 - 1^2}$$

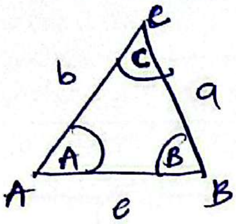
$=$

$$= \tan\theta - \sec\theta$$

ත්‍රිකෝණයක ගුණාංග ආශ්‍රිත ගැටලු

(sin සූත්‍ර, cos සූත්‍ර ආශ්‍රිත ගැටලු)

සම්මත අංකනය



$A+B+C=\pi$

sin සූත්‍රය

ඕනෑම ABC Δ ක් සඳහා

$$\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k}$$

$$\boxed{\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=k}$$

cos සූත්‍රය

~~ඕනෑම ABC Δ ක් සඳහා~~

$$\boxed{\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$$

sin සූත්‍රයේ,

① දිගවල් කෝණවලට හැරවීම

$a=\sin A k$

$b=\sin B k$

$c=\sin C k$

② කෝණ දිගවල් බවට හැරවීම

$\sin A=\frac{a}{k}$

$\sin B=\frac{b}{k}$

$\sin C=\frac{c}{k}$

cos සූත්‍රය

ගැටලුවල cos සූත්‍රය යෙදීමේදී [illegible]

sin, cos සූත්‍ර ආශ්‍රිත ගැටලු

① සාධන ගැටලු

② ත්‍රිකෝණ ආශ්‍රිත විසඳුම් ගැටලු

① සාධන ගැටලු

- $A+B+C=180$ භාවිතයෙන්
- සාධන ගැටලුවලදී දිගවල් හෝ කෝණ ආදේශ කිරීම වැදගත්

① $a\cos\left[\frac{B-C}{2}\right]=(b+c)\sin\frac{A}{2}$ බව

$\frac{a}{(b+c)}=\frac{\sin A/2}{\cos\left[\frac{B-C}{2}\right]}$ බව

LHS

$\frac{a}{(b+c)}=\frac{\sin A\cancel{k}}{\sin B\cancel{k}+\sin C\cancel{k}}$

$=\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}$

$=\frac{\sin A/2\times\cancel{2}\times\cos A/2}{\cancel{2}\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}$

$=\frac{\sin A/2\cos A/2}{\sin(90-A/2)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}$

$=\frac{\sin A/2\cancel{\cos A/2}}{\cancel{\cos A/2}\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}$

$=\frac{\sin A/2}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}$

② $a^2+b^2+c^2=2bc\cos A+2ca\cos B+2ab\cos C$ බව පෙන්වන්න

RHS (RHS සලකමු)

$2bc\cos A+2ca\cos B+2ab\cos C$

$=\cancel{2bc}\times\frac{(b^2+c^2-a^2)}{\cancel{2bc}}+\cancel{2ca}\frac{(a^2+c^2-b^2)}{\cancel{2ac}}+\cancel{2ab}\times\frac{(a^2+b^2-c^2)}{\cancel{2ab}}$

$=b^2+\cancel{c^2}-\cancel{a^2}+a^2+c^2-\cancel{b^2}+\cancel{a^2}+b^2-\cancel{c^2}$

$=a^2+b^2+c^2$

③ $b^2\sin(C-A)=(c^2-a^2)\sin B$ බව

$\frac{b^2}{c^2-a^2}=\frac{\sin B}{\sin(C-A)}$ බව

RHS (වමපස සලකමු)

$\frac{\sin B}{\sin(C-A)}=\frac{b/k}{\sin C\cos A-\cos C\sin A}$

$=\frac{b}{c\cos A-\cos C a}$

$=\frac{b}{\frac{\cancel{c}(b^2+c^2-a^2)}{2b\cancel{c}}-\frac{\cancel{a}(b^2+a^2-c^2)}{2b\cancel{a}}}$

$=\frac{b\times 2b}{\cancel{b^2}+c^2-a^2-\cancel{b^2}-a^2+c^2}$

$=\frac{\cancel{2}b^2}{\cancel{2}c^2-\cancel{2}a^2}=\frac{b^2}{c^2-a^2}$

① α, β ; 0 හා $\pi/4$ අතර කෝණ වේ.
$\cos(\alpha+\beta) = 4/5$, $\sin(\alpha-\beta) = 5/13$ වේ.
$\tan 2\alpha$ සොයන්න

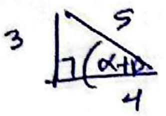
$0 < \alpha < \pi/4$
$0 < \beta < \pi/4$
$0 < \alpha+\beta < \pi/4 + \pi/4$
$0 < \alpha+\beta < \pi/2$

$\cos(\alpha+\beta) = 4/5$ $\sin(\alpha-\beta) = 5/13$

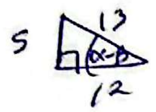
tan2α

$$\boxed{2\alpha = (\alpha+\beta) + (\alpha-\beta)}$$

$$\tan(2\alpha) = \tan[(\alpha+\beta) + (\alpha-\beta)]$$



$\tan(\alpha+\beta) = 3/4$



$\tan(\alpha-\beta) = 5/12$

සාමාන්‍යයෙන් sin, cos සූත්‍ර
ගැටළු වලට යොදන ක්‍රම

① ත්‍රිකෝණයක්
- ① පාද 3ක්, කෝණ 1ක් ඇත්නම් cos සූත්‍රය
- ② පාද 2ක්, කෝණ 2ක් sin සූත්‍රය

② කෝණ 2ක් සම්බන්ධ නම්,
- ① වෙනත් ක්‍රමයක් නැත්නම් මෙම ක්‍රමයෙන්
- ② වෙනත් ක්‍රමයක් නැත්නම් එක කෝණයකට ඉදිරි පාදය හා පොදු පාදය යොදා sin සූත්‍රය ලියන්න. අනෙක් කෝණයේද ඉදිරි පාදය හා පොදු පාදය sin සූත්‍රය ලියා පොදු පාදයෙන් සමාන කරන්න.

* සමහර ගැටළුවලදී ත්‍රිකෝණයේ සූත්‍රයක් ඇසුරින් වලංගු එක කොටසක් සුළු කර, එම ඉතිරි කොටස් වලට ද එයම ආදේශ කළ හැක. (කොටස් 0 බවට පත් කිරීම ඇසුරින්)

① $(b^2-c^2)\cot A + (c^2-a^2)\cot B + (a^2-b^2)\cot C = 0$ බව

$$\underbrace{(b^2-c^2)\cot A}_{①} + \underbrace{(c^2-a^2)\cot B}_{②} + \underbrace{(a^2-b^2)\cot C}_{③}$$

① $(b^2-c^2)\cot A$

~~$(b-c)(b+c)\cot A$~~

$(b^2-c^2)\dfrac{\cos A}{\sin A}$

$(b^2-c^2)\dfrac{\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}{a/k}$

$$k\,\frac{\boxed{(b^4-c^4) - a^2(b^2-c^2)}}{2abc}$$

$$\frac{k}{2abc}[(b^4-c^4) - a^2(b^2-c^2)]$$

① $\Rightarrow \dfrac{k}{2abc}[(b^4-c^4) - a^2(b^2-c^2)]$

② $\Rightarrow \dfrac{k}{2abc}[(c^4-a^4) - b^2(c^2-a^2)]$

③ $\Rightarrow \dfrac{k}{2abc}[(a^4-b^4) - c^2(a^2-b^2)]$

①+②+③

$$\frac{k}{2abc}\left[\cancel{b^4}-\cancel{c^4}+\cancel{c^4}-\cancel{a^4}+\cancel{a^4}-\cancel{b^4} \; \cancel{-a^2b^2}+\cancel{a^2c^2}-\cancel{b^2c^2}+\cancel{a^2b^2} -\cancel{c^2a^2}+\cancel{c^2b^2}\right]$$

$$\frac{k}{2abc}\times 0$$

0

* කොසයින් නියමයට අදාළ ගැටළු.

* දී ඇති අනුපාතයන් සමාන කිරීමෙන් පසු k නියතය ලෙස ගෙන පැතිවල අගයන් k ඇසුරෙන් ලබා ගනී. ... ආදේශ කර ...

① ශ්‍රී ... ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා

$\frac{b+c}{11}=\frac{c+a}{12}=\frac{a+b}{13}$ නම්

(i) $\frac{\sin A}{7}=\frac{\sin B}{6}=\frac{\sin C}{5}$ බව

(ii) $\frac{\cos A}{7}=\frac{\cos B}{19}=\frac{\cos C}{25}$ බව පෙන්වන්න.

$\frac{b+c}{11}=\frac{c+a}{12}=\frac{a+b}{13}=k$

$b+c=11k$ — ①
$c+a=12k$ — ②
$a+b=13k$ — ③

සමීකරණ විසඳීමෙන්
$a=7k$
$b=6k$
$c=5k$

(i) sin නියමයෙන්

$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$

ආදේශයෙන්,

$\frac{\sin A}{7k}=\frac{\sin B}{6k}=\frac{\sin C}{5k}$

$\frac{\sin A}{7}=\frac{\sin B}{6}=\frac{\sin C}{5}$ //

(ii) $\underbrace{\frac{\cos A}{7}}_{①}=\underbrace{\frac{\cos B}{19}}_{②}=\underbrace{\frac{\cos C}{25}}_{③}$

* cos සූත්‍රයේ සමාන කිරීම් ... ... සමාන කරගනිමු.

①/ $\frac{\cos A}{7}=\frac{c^2+b^2-a^2}{2cb\times 7}$

$=\frac{25k^2+36k^2-49k^2}{14\times 30k^2}$

$=\frac{1}{35}$

②/ $\frac{\cos B}{19}$

$=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac\times 19}$

$=\frac{49k^2+25k^2-36k^2}{19\times 2\times 35k^2}$

$=\frac{1}{35}$

③/ $\frac{\cos C}{25}$

$=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab\times 25}$

$=\frac{36k^2+49k^2-25k^2}{50\times 42k^2}$

$=\frac{1}{35}$

① = ② = ③ $=\frac{1}{35}$

$\frac{\cos A}{7}=\frac{\cos B}{19}=\frac{\cos C}{25}$ //

---

① ABC Δ සඳහා $\frac{\cos A}{a}=\frac{\cos B}{b}=\frac{\cos C}{c}$

පෙ. $a=10$ cm නම්, ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

$\frac{\cos A}{a}=\frac{\cos B}{b}=\frac{\cos C}{c}$

$\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc\times a}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac\times b}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab\times c}$

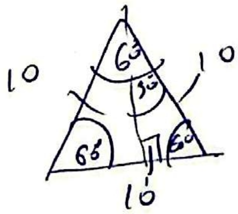
$c^2+b^2-a^2=a^2+c^2-b^2=a^2+b^2-c^2$
① ②

①/ $\cancel{c^2}+b^2-a^2-a^2-\cancel{c^2}+b^2=0$
$-2a^2+2b^2=0$
$-a^2+b^2=0$
$a^2=b^2$

②/ $\cancel{a^2}+c^2-b^2-\cancel{a^2}-b^2+c^2=0$
$2(c^2-b^2)=0$
$c^2-b^2=0$
$c^2=b^2$

$a^2=b^2=c^2$
$a=b=c$

$\therefore a, b, c$ සමපාද ත්‍රිකෝණයකි.



වර්ගඵලය $=\frac{1}{2}\times\left(10\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times 10$

$=25\sqrt{3}$ cm^2 //

$$① \frac{1}{(a+c)} + \frac{1}{(b+c)} = \frac{3}{(a+b+c)}$$

නම්, $\hat{C} = \frac{\pi}{3}$ rad බව පෙන්වන්න.

$$\frac{1}{(a+c)} + \frac{1}{(b+c)} = \frac{3}{(a+b+c)}$$

$$\frac{180}{3} = 60 \rightarrow \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

පෙන්විය යුතු නැත.

ප්‍රශ්නයේ වාක්‍යයකින්ම
දිගටම ලියා ගන්න.

$$\frac{b+c+a+c}{(ab+ac+cb+c^2)} = \frac{3}{(a+b+c)}$$

$$(b+a+2c)(a+b+c) = 3ab + 3ac + 3cb + 3c^2$$

$$(a+b)^2 + cb + ca + 2ca + 2cb + 2c^2 = 3ab + 3ac + 3cb + 3c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + \cancel{cb} + \cancel{ca} + \cancel{2ca} + \cancel{2cb} + 2c^2 = 3ab + \cancel{3ac} + \cancel{3cb} + 3c^2$$

$$(a^2 + b^2 - c^2) = ab$$

$$\cos C \times \cancel{2ab} = \cancel{ab}$$

$$\cos C = \frac{1}{2}$$

$$\hat{C} = 60^\circ \Rightarrow \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

Sin නියමය, cos නියමය සාධනය

*ත්‍රිකෝණයකදී Sin නියමය, cos නියමය සාධනයේදී සුළුකෝණී ත්‍රිකෝණ, මහා කෝණී ත්‍රිකෝණ, සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණ ලෙස වෙන වෙනම සාධනය කළ යුතුය.

Sin නියමය :

ඕනෑම ABC Δ යක් සඳහා,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k$$

or

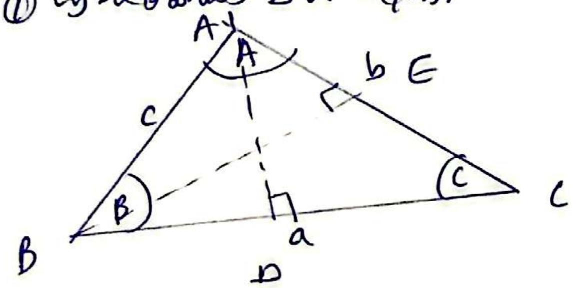
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = k$$

k = නියතයකි

Sin නියමය සාධනය :

[සාධනයේදී සෑම පාදයකට ලම්බයන් ඇඳ එක අනුපාතයක් ලෙස සාධනය ලබයි]

① සුළුකෝණී Δ යක් සඳහා :



ABD Δ යේ

$AD = c\sin B$ — ①

ADC Δ යේ

$AD = b\sin C$ — ②

① = ②

$c\sin B = b\sin C$

$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

or

$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ — ②

AEB Δ යේ

$BE = c\sin A$ — ③

BEC Δ යේ

$BE = a\sin C$ — ④

③ = ④

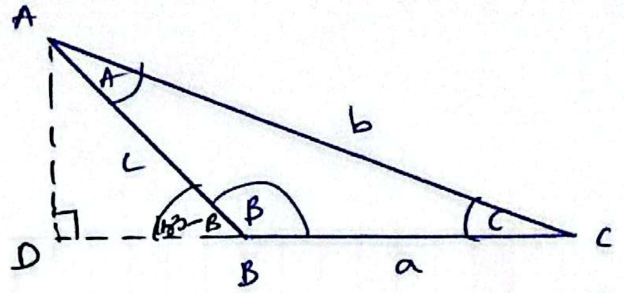
$c\sin A = a\sin C$

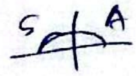
$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ — II

② = II

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

② මහා කෝණී Δ යක් සඳහා :





ADB Δ යේ

$AD = c\sin(180-B)$

$AD = c\sin B$ — ①

ADC Δ යේ

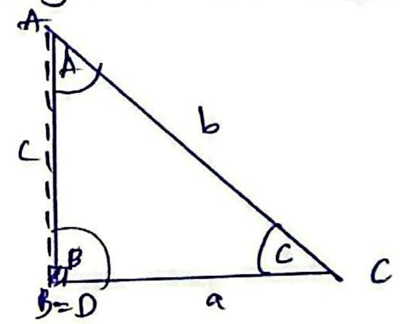
$AD = b\sin C$ — ②

① = ②

$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$

සෑම විටම ලම්බය යොදාගත යුතුය. සුළුකෝණී Δ දී ඒ ආකාරයෙන්ම හඳුනාගනී.

③ සෘජුකෝණී Δ යක් සඳහා :



ADC Δ යේ.

$AD = b\sin C$ — ①

රූපයට අනුව,

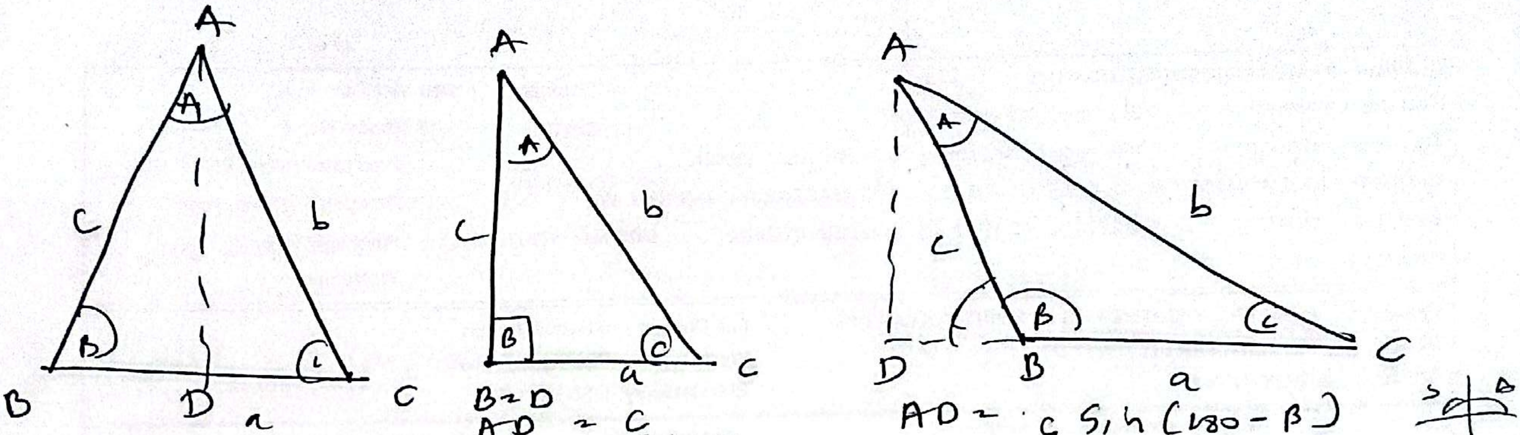
$AD = c$

$AD = c\sin B$ — ② $[\because \sin B = \sin 90^\circ = 1]$

① = ②

$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

cos ප්‍රමේයය සාධනය



$AD = c\sin B$

$B = D$
$AD = c$
$AD = c\sin 90$
$AD = c\sin B$

$AD = c\sin(180-\beta)$
$AD = c\sin B$

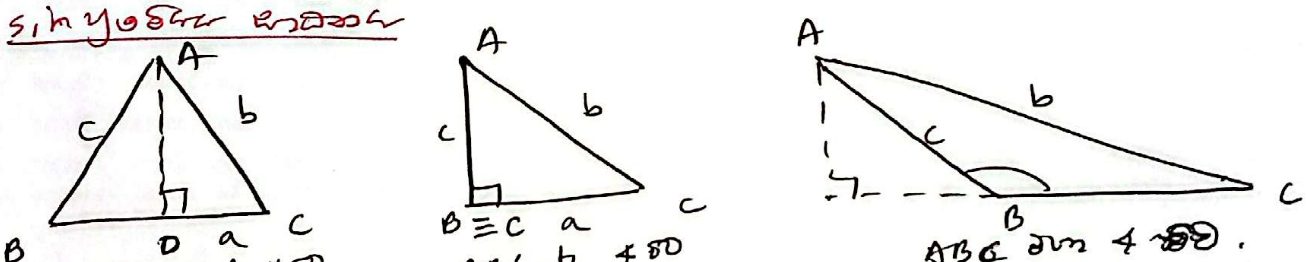
ADC Δ ට පයිතගරස් ප්‍රමේයයෙන්;

$$b^2 = (c\sin B)^2 + (a - c\cos B)^2$$
$$b^2 = c^2\sin^2 B + a^2 - 2ac\cos B + c^2\cos^2 B$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B$$
$$\cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$$

එලෙසම,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

sin ප්‍රමේයය සාධනය



ABC සුළු ∢ ඩි.

$AD = AB\sin B = AC\sin C$
$c\sin B = b\sin C$
$\therefore \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

ABC ⊥ ∢ 90

$AD = AB = AC\sin C$
$c = b\sin C$
$c\sin 90 = b\sin C$
$\therefore \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

ABC මහා ∢ ඩි.

$AD = AB\sin(\pi - B)$
$AD = AC\sin C$
$c\sin B = b\sin C$
$\therefore \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

මෙලෙසම $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{a}{\sin A}$ බව පෙන්විය හැක.

∴ ABC ඕනෑම Δ ක් සඳහා sin ප්‍රමේයය සත්‍ය වේ.

cos නියමය

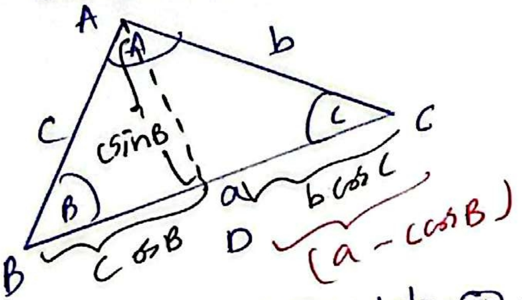
ඕනෑම ABC Δයක සඳහා

$$\cos A = \frac{c^2+b^2-a^2}{2cb} \text{ වේ.}$$

cos නියමය සාධනය

[සිරස්ව සෘජුකෝණාස්‍ර ලම්බකයක් ඇඳ ඒ ත්‍රිකෝණයන්හි පයිතගරස් ප්‍රමේයය යොදා ගනිමු.]

① සුළුකෝණී Δයක සඳහා,



ADC Δයට පයිතගරස් යෙදීම.

$$b^2 = c^2\sin^2 B + \cancel{b^2\cos^2 C}\ (a - c\cos B)^2$$

$$b^2 = c^2\sin^2 B + a^2 - 2ac\cos B + c^2\cos^2 B$$

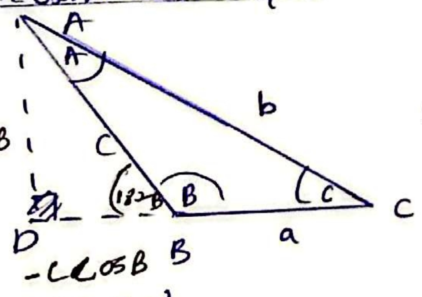
$$b^2 = a^2 + c^2(\sin^2 B + \cos^2 B) - 2ac\cos B$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$2ac\cos B = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

② මහා කෝණී Δයක සඳහා



ADC Δයේ

$$b^2 = c^2\sin^2 B + (a - c\cos B)^2$$

$$b^2 = c^2\sin^2 B + a^2 - 2ac\cos B + c^2\cos^2 B$$

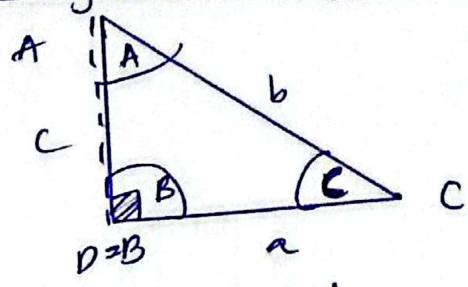
$$b^2 = c^2(\sin^2 B + \cos^2 B) + a^2 - 2ac\cos B$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B$$

$$2ac\cos B = c^2 + a^2 - b^2$$

$$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$$

③ සෘජුකෝණී Δයක සඳහා



ADC Δට පයිතගරස්,

$$b^2 = a^2 + c^2$$

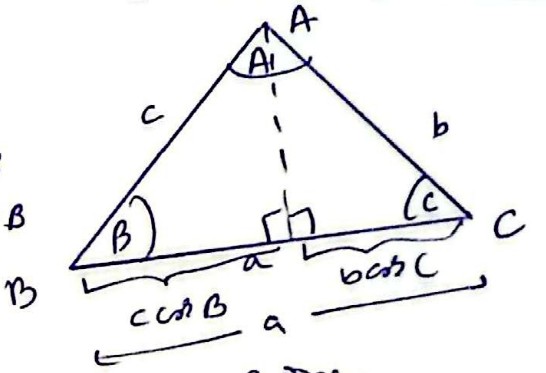
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$[\because \cos B = \cos 90° = 0]$$

$$2ac\cos B = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

ප්‍රක්ෂේපණ සූත්‍රය



සාධනය,

BC පැත්ත සඳහා,

$$a = c\cos B + b\cos C$$

$$a = b\cos C + c\cos B$$

එලෙසම.

$$\boxed{\begin{aligned} a &= b\cos C + c\cos B \\ b &= c\cos A + a\cos C \\ c &= a\cos B + b\cos A \end{aligned}}$$

cos වල ගැටලුවලදී cos නියමය භාවිතය මෙන්ම sin නියමය වගේ දෙවිදියට ප්‍රශ්න ගොඩනැගෙනවා, ප්‍රක්ෂේපණ සූත්‍රය භාවිතා කරන්න.

නිදසුන්

(1) $(a+b)\cos C + (b+c)\cos A + (c+a)\cos B = a+b+c$ බව

L.H.S

$(a+b)\cos C + (b+c)\cos A + (c+a)\cos B$

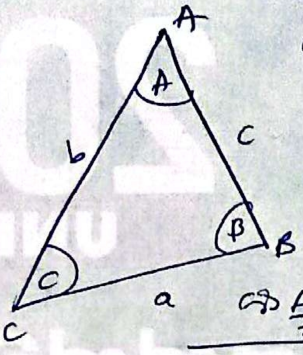
$= a\cos C + b\cos C + b\cos A + c\cos A + c\cos B + a\cos B$

$= \underbrace{a\cos C + c\cos A}_{b} + \underbrace{b\cos C + c\cos B}_{a}$
$+ \underbrace{b\cos A + a\cos B}_{c}$

$= b + a + c$
$= a+b+c$

අර්ධ කෝණ සූත්‍ර

$\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\tan\frac{A}{2}$ සෙවීම.



$a+b+c = 2s.$

$\cos\frac{A}{2}$ සෙවීම

cos සූත්‍රයෙන්,

$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$2\cos^2\frac{A}{2} - 1 = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{\overbrace{(b+c+a)}^{2s}\overbrace{(b+c-a)}^{2s-2a}}{4bc}$

$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

1	2	3
a	b	c
b	c	a
c	a	b

$\sin\frac{A}{2}$ සෙවීම.

cos සූත්‍රයෙන්,

$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$1 - 2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{\overbrace{(a+b-c)}^{(2s-2c)}\overbrace{(a-b+c)}^{(2s-2b)}}{4bc}$

$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

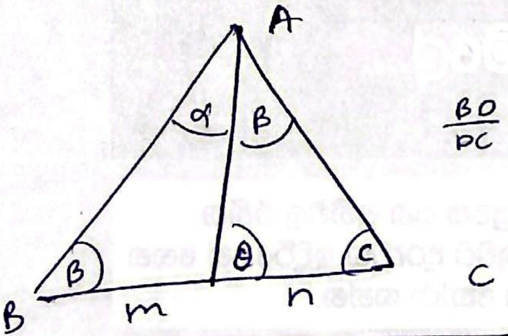
1	2	3	4
b	c	b	c
c	a	c	a
a	b	a	b

$\tan\frac{A}{2}$ සෙවීම

$\tan\frac{A}{2} = \frac{\sin A/2}{\cos A/2}$

$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

cot සූත්‍රය

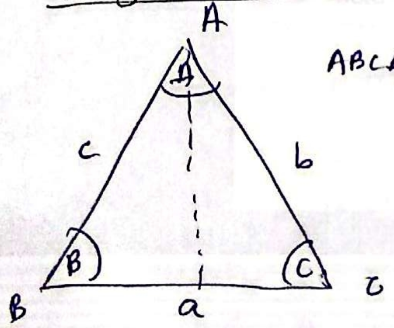


$\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n}$

$$\boxed{(m+n)\cot\theta = m\cot\alpha - n\cot\beta}$$

$$\boxed{(m+n)\cot\theta = n\cot B - m\cot C}$$

sin සූත්‍රයෙන් Δ ක වර්ගඵලය සොයා ගැනීම



ABC Δ යේ වර්ගඵලය

$= \frac{1}{2}.a.b\sin C$

or

$= \frac{1}{2}b.c\sin A$

or

$= \frac{1}{2}c.a.\sin B$

ABC Δට

~~13~~ (a)

sin සූත්‍රය මගින් cos සූත්‍රය ව්‍යුත්පන්නය කිරීම

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\frac{(k\sin B)^2+(k\sin C)^2-(k\sin A)^2}{2k\sin B \cdot k\sin C}$$

$$\frac{\cancel{k^2}\sin^2 B+\cancel{k^2}\sin^2 C-\cancel{k^2}\sin^2 A}{2\cancel{k^2}\sin B\sin C}$$

$$\cancel{\left(\frac{1-\cos 2B}{2}\right)+\left(\frac{1-\cos 2C}{2}\right)-\left(\frac{1-\cos 2A}{2}\right)}$$

$$\frac{\sin^2 B+(\sin C+\sin A)(\sin C-\sin A)}{2\sin B\sin C}$$

$$\frac{\sin^2 B+2\sin\left(\frac{C+A}{2}\right)\cos\left(\frac{C-A}{2}\right)\cdot 2\cos\left(\frac{C+A}{2}\right)\sin\left(\frac{C-A}{2}\right)}{2\sin B\sin C}$$

$$\frac{\sin^2 B+\sin(C+A)\sin(C-A)}{2\sin B\sin C}$$

$$\frac{\sin^2 B+\sin(180-B)\sin(C-A)}{2\sin B\sin C}$$

$$\frac{\sin^2 B+\sin B\sin(C-A)}{2\sin B\sin C}$$

$$\frac{\sin B+\sin(C-A)}{2\sin C}$$

$$\frac{\sin\left[180-(C+A)\right]+\sin(C-A)}{2\sin C}$$

$$\frac{\sin(C+A)+\sin(C-A)}{2\sin C}$$

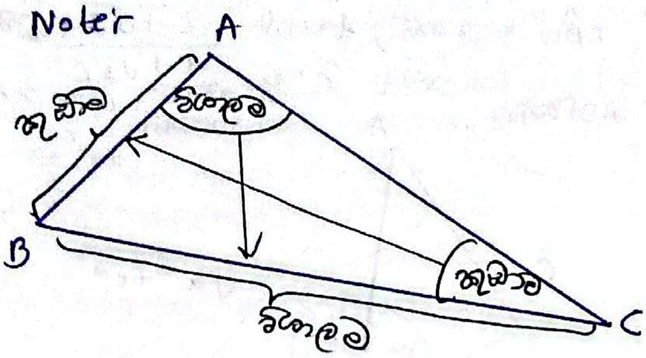
$$\frac{\cancel{2\sin C}\cos A}{\cancel{2\sin C}}$$

$$\cos A$$

ත්‍රිකෝණ ඇසුරෙන් විසඳුම

ගැටලු

Note:



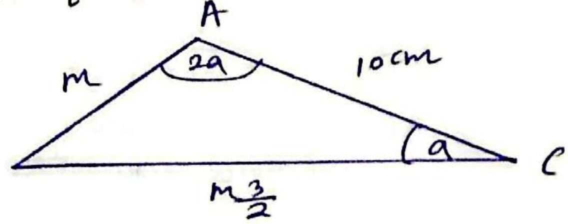
• ත්‍රිකෝණ ඇසුරෙන් විසඳුම ගැටලුවලදී sin සූත්‍රය, cos සූත්‍රය යොදමින් පහත ඒවා සොයනු ලැබේ

① cos සූත්‍රය
පාද 3, කෝණ 1ක් සම්බන්ධ වේ

② sin සූත්‍රය
පාද 2ක්, කෝණ 2ක් සම්බන්ධ වේ

* මේවා ඉතා අවශ්‍ය කරුණු වේ

උදා: ① ත්‍රිකෝණයක විශාලතම කෝණය කුඩාතම කෝණය මෙන් දෙගුණයක් ද, දිගම පාදය කෙටිම පාදයේ දිග මෙන් $1\frac{1}{2}$ ගුණයක් ද වේ. ත්‍රිකෝණයේ කුඩාතම කෝණය $\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ බව පෙන්වන්න. මධ්‍ය පාදයේ දිග 10cm බවද දී ඇත්නම් අනෙක් පාද දෙකේ දිගවල් සොයන්න.



sin සූත්‍රය

$$\frac{\sin a}{m} = \frac{\sin 2a}{\frac{3m}{2}}$$

$$\cancel{3}\times\sin a = \cancel{4}\sin a\cdot\cos a \,/3$$

$$\cos a = \frac{3}{4}$$

$$\cos a = \frac{3}{4}$$

$$a = \cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

∴ ත්‍රිකෝණයේ කුඩාතම කෝණය $\cos^{-1}(3/4)$ වේ

ABC Δ,

cos සූත්‍රය,

$$\cos a = \frac{100 + \frac{m^2 9}{4} - m^2}{2\times 10\times \frac{m3}{2}}$$

$$\frac{3}{4}\times 30m = 100 + \frac{m^2 9}{4} - m^2$$

$$\frac{90m}{4} = 100 + \frac{5}{4}m^2$$

$$0 = 5m^2 - 90m + 400$$

$$0 = m^2 - 18m + 80$$

$$0 = (m-8)(m-10)$$

$m = 8$ හෝ $m = 10$

80, 40×2, 8 10

m=10 විට ත්‍රිකෝණයේ පාද දෙකක් සමාන වේ. එවිට ප්‍රශ්නයේ දත්ත සමග නොගැලපේ.

$m \neq 10$

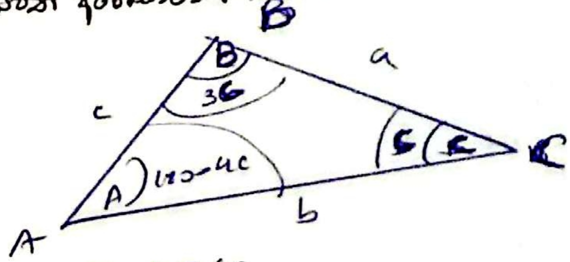
$\therefore m = 8$ cm

BA = 8cm

BC = 12cm

* මෙවැනි ගැටලු sin සූත්‍රය ද භාවිතයෙන් විසඳිය හැක.

උදා: ② ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා $B = 3C$ නම්, $\cos C = \sqrt{\frac{b+c}{4c}}$ බවත් $\sin\frac{A}{2} = \frac{b-c}{2c}$ බවත් පෙන්වන්න.



sin සූත්‍රය,

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b}$$

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{(\sin 3C)}{b}$$

$$b\sin C = c\,(3\sin C - 4\sin^3 C)$$

$$b = c\,(3 - 4\sin^2 C)$$

$$b = c\,[3 - 4(1-\cos^2 C)]$$

$$b = 3c - 4c + 4c\cos^2 C$$

$$b = -c + 4c\cos^2 C$$

$$\frac{b+c}{4c} = \cos^2 C$$

$$\cos C = \sqrt{\frac{b+c}{4c}}$$

[illegible]

$A = 180 - 4C$

$\frac{A}{2} = 90 - 2C$

$\sin\left(\frac{A}{2}\right) = \sin(90 - 2C)$

$\sin\frac{A}{2} = \cos 2C$

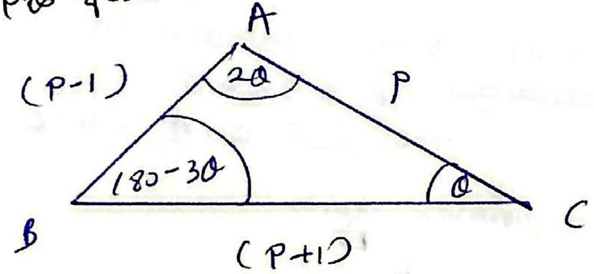
$\sin\frac{A}{2} = -1 + 2\cos^2 C$

$\sin\frac{A}{2} = 2 \times \frac{(b+c)}{\frac{4c}{2}} - 1$

$= \frac{b+c-2c}{2c}$

$\sin\frac{A}{2} = \frac{b-c}{2c}$

උ. දා. ③ ත්‍රිකෝණයක පාද වල දිග $(p-1)$, p, $(p+1)$ වේ. $(p>1)$ ත්‍රිකෝණයේ විශාලතම කෝණය කුඩාම කෝණය මෙන් දෙගුණයක් වේ. sin නීතිය හා කොසයින නීතිය භාවිතයෙන් p හි අගය සොයන්න.



sin සූත්‍රය

ABC Δ හි,

[illegible]

$\frac{\sin\theta}{(p-1)} = \frac{\sin 2\theta}{p+1}$

$\frac{\cancel{\sin\theta}}{(p-1)} = \frac{2\cancel{\sin\theta}\cos\theta}{(p+1)}$

$\frac{(p+1)}{2(p-1)} = \cos\theta$

[illegible] cos සූත්‍රය [illegible] p [illegible]

$$\cos\theta = \frac{p^2 + (p+1)^2 - (p-1)^2}{2p(p+1)}$$

$\frac{(p+1)}{\cancel{2}(p-1)} = \frac{p^2 + \cancel{p^2} + 2p + \cancel{1} - \cancel{p^2} + 2p - \cancel{1}}{\cancel{2}p(p+1)}$

$(p+1)^2 = (p-1)(p+4)$

$\cancel{p^2} + 2p + 1 = \cancel{p^2} + 4p - p - 4$

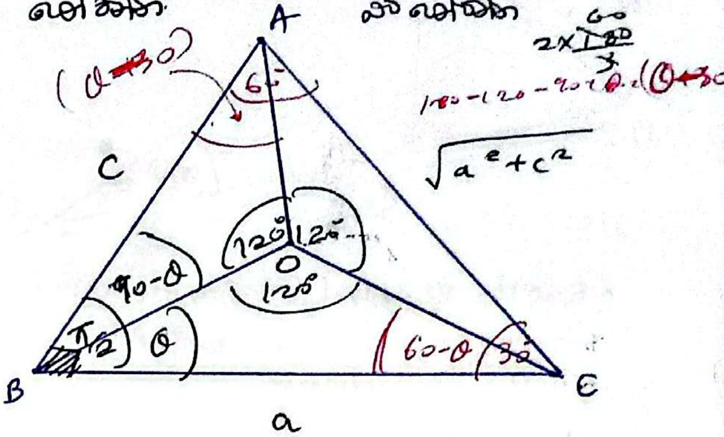
$5 = p$

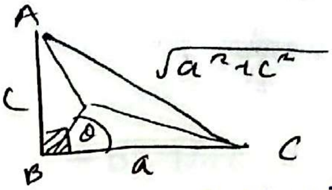
$p = 5$

උ. දා. ④ ABC ත්‍රිකෝණයේ B කෝණය $\frac{\pi}{2}$ වේ. O ලක්ෂ්‍යය 3 ශීර්ෂයන් $\frac{2\pi}{3}$ කෝණයන් ආපාතනය කරන ත්‍රිකෝණය ඇතුළත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. $C\hat{B}O = \theta$ නම්, $\tan\theta = \frac{c+\sqrt{3}a}{a+\sqrt{3}c}$ බව පෙන්වන්න. තවද $\hat{C} = \frac{\pi}{6}$ නම් $\cos 2AO$ [illegible]

$2 \times \frac{60}{180}$

$180 - 120 - 90 + \theta$ ($\theta - 30$)





OBC Δ sin සූත්‍රය

$\frac{a}{\sin 120} = \frac{OB}{\sin(60-\theta)}$

$\frac{a\sin(60-\theta)}{\sin 120} = OB$ — ①

OAB Δ sin සූත්‍රය

$\frac{c}{\sin 120} = \frac{OB}{\sin(\theta-30)}$

$\frac{c\sin(\theta-30)}{\sin 120} = OB$ — ②

① = ②

$\frac{a\sin(60-\theta)}{\sin 120} = \frac{c\sin(\theta-30)}{\sin 120}$

$(\div \cos\theta)$ $a[\sin 60\cos\theta - \cos 60\sin\theta]$
$= c[\sin\theta\cos 30 - \cos\theta\sin 30]$

$a\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\tan\theta\right] = c\left[\tan\theta\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right]$

$\sqrt{3}a - a\tan\theta = c\sqrt{3}\tan\theta - c$

$\sqrt{3}a + c = \sqrt{3}c\tan\theta + a\tan\theta$

$\tan\theta = \frac{(\sqrt{3}a + c)}{(\sqrt{3}c + a)}$ — Ⅰ

වැදගත්

ත්‍රිකෝණයක් සමකෝණ
එකම පාදයකදී sin සූත්‍රය
යොදාගත යුතු ආකාරය
පහත දැක්වේ

(1) එක ත්‍රිකෝණයක් ඉදිරි කෝණය
හා පොදු පාදය සම්බන්ධ කර
sin සූත්‍රය යොදන්න —(1)
(2) අනෙක් ත්‍රිකෝණයේදී ඉදිරි කෝණය
හා පොදු පාදය සම්බන්ධ කර
sin සූත්‍රය යොදන්න —(2)
පොදු පාදය සමාන නිසා
(1) = (2)

CO = 2AO බව

ත්‍රිකෝණමිතිය,

$$\tan 30^\circ = \frac{c}{a}$$

$$\frac{1}{\sqrt3} = \frac{c}{a}$$

$$a = \sqrt3 c \quad \text{—(II)}$$

(II), (I) මගින්

$$\tan\theta = \frac{\sqrt3\,\sqrt3 c + c}{\sqrt3 c + \sqrt3 c}$$

$$\tan\theta = \frac{2}{\sqrt3} \quad \text{—(III)}$$

AOC Δ sin සූත්‍රය

$$\frac{OA}{\sin(\theta-30)} = \frac{OC}{\sin(90-\theta)}$$

$$\frac{OA}{\sin(\theta-30)} = \frac{OC}{\cos\theta}$$

$$\frac{OA}{\sin\theta\cos30 - \cos\theta\sin30} = \frac{OC}{\cos\theta}$$

$$OA\cos\theta = OC[\sin\theta\cos30 - \cos\theta\sin30]$$

$\div \cos\theta$

$$OA = OC\left[\tan\theta\cdot\frac{\sqrt3}{2} - \frac12\right]$$

$$= OC\left[\frac{2}{\sqrt3}\cdot\frac{\sqrt3}{2} - \frac12\right]$$

$$= OC\left[1-\tfrac12\right]$$

$$OA = \tfrac12 OC$$

$$2OA = OC$$

2.19 (1) රූපයේ $O\hat{A}B = O\hat{B}C = O\hat{C}A = \theta$ නම්
ABC ත්‍රිකෝණයේ සුපුරුදු
අංකනයෙන්, $OB = \frac{a\sin(C-\theta)}{\sin C}$

$= \frac{c\sin\theta}{\sin B}$ වේ.

$\cot\theta = \cot A + \cot B + \cot C$
බව පෙන්වන්න.

$$\frac{a\sin(C-\theta)}{\sin C} = \frac{c\sin\theta}{\sin B}$$

$$\frac{a(\sin C\cos\theta - \cos C\sin\theta)}{\sin C} = \frac{c\sin\theta}{\sin B}$$

$\div \sin\theta$

$$a\frac{\cancel{\sin C}\cos\theta}{\cancel{\sin C}\sin\theta} - \frac{a\cos C\cancel{\sin\theta}}{\sin C\cancel{\sin\theta}} = \frac{c\cancel{\sin\theta}}{\sin B\cancel{\sin\theta}}$$

$$a\cot\theta - a\cot C = \frac{c}{\sin B}$$

$$\cot\theta - \cot C = \frac{c}{a\sin B} \quad \text{—(I)}$$

$$\frac{c}{a\sin B} = \frac{\sin C}{\sin A\sin B}$$

$$= \frac{\sin(180-(A+B))}{\sin A\sin B}$$

$$= \frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}$$

$$= \frac{\cancel{\sin A}\cos B}{\cancel{\sin A}\sin B} + \frac{\cos A\cancel{\sin B}}{\sin A\cancel{\sin B}}$$

$$\frac{c}{a\sin B} = \cot B + \cot A \quad \text{—(II)}$$

(I) = (II)

$$\cot\theta - \cot C = \cot B + \cot A$$

$$\cot\theta = \cot A + \cot B + \cot C$$

ත්‍රිකෝණමිතික සමීකරණ
[සාධාරණ විසඳුම්]

සාධාරණ විසඳුම - ත්‍රිකෝණමිතික සමීකරණයක ඇති විසඳුම් ප්‍රමාණය අනන්තයක් වන බැවින් ඒ සියලු විසඳුම් ලබාදෙන සූත්‍රය එම සාධාරණ විසඳුම වේ.

මූලික සමීකරණ හෙවත් ආකාර

① මූලික ආකාරය

$\tan x = \tan\alpha$

$x = n\pi + \alpha$

$\tan(-\theta) = [-\tan\theta]$

$\sin x = \sin\alpha$

$x = n\pi + (-1)^n\alpha$

$\sin(-\theta) = [-\sin\theta]$

$\cos x = \cos\alpha$

$x = 2n\pi \pm \alpha$

$\cos(\pi-\theta) = [-\cos\theta]$

$-1 \leq \sin x \leq 1$

$-1 \leq \cos x \leq 1$

② $a\cos x + b\sin x = c$ ආකාරය

පියවර - ① සමීකරණය $(\sqrt{a^2+b^2})$ න් බෙදන්න

② පලමු පදය සමාන වන ලෙස එක් පදයක් $\sin\alpha$ ලෙස

පලමු පදය		දෙවන පදය
$\cos\alpha$	$\longrightarrow$	$\sin\alpha$
$\sin\alpha$	$\longrightarrow$	$\cos\alpha$

③ සූත්‍රය භාවිතා කර $\cos(A-B)$, $\cos(A+B)$, $\sin(A-B)$, $\sin(A+B)$ ආකාරයකින් එකක් ලබා ගන්න.

④ සූත්‍රය සාධාරණ විසඳුම ලියන්න.

③ $a\cos^2 x + b\sin x\cos x + c\sin^2 x = d$ ආකාරය

පියවර - ① $\cos^2 x$, $\sin^2 x$ වල $\cos 2x$ ඇසුරෙන්ද $\sin x\cos x$ වල $\sin 2x$ ඇසුරෙන්ද ලියා ගැනීම

$A\cos 2x + B\sin 2x = C$

ආකාරයට පත් කරන්න.

② ② ආකාරයේදී මෙන් පියවර ① → ④ දක්වා

④ සමගාමී ත්‍රිකෝණමිතික සමීකරණ

⑤ ප්‍රශ්න

ත්‍රිකෝණ ආකාරයේ සමීකරණ විසඳීම (අභ්‍යාස)

① මූලික ආකාරය.

Ⓘ $\tan x = \tan\alpha$ ආකාරය

~~$x = n\pi + \alpha$~~

$$\boxed{\begin{array}{l} \tan x = \tan\alpha \text{ නම්,} \\ x = n\pi + \alpha \\ \text{මෙහි } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ n \in \mathbb{Z} \end{array}}$$

- සෑම විටම අවසානයේ ($n \in \mathbb{Z}$) ලියන්න
- මෙහි α ඇත්තේ රේඩියන් වලින් rad වලින් පමණක් ලිවිය යුතුයි.

① $\tan x - \sqrt{3} = 0$

$\tan x = \sqrt{3}$

$\tan x = \tan\frac{\pi}{3}$

$x = n\pi + \frac{\pi}{3}$

$(n \in \mathbb{Z})$

② $\tan x = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\tan\alpha}$ ලෙස ගනිමු.

$\tan x = \tan\alpha$

$x = n\pi + \alpha$ $\quad$ $\tan\alpha = \frac{1}{2}$

$x = n\pi + \tan^{-1}(1/2)$ $\quad$ $\alpha = \tan^{-1}(1/2)$

$(n \in \mathbb{Z})$

සම්මත ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාතයක් නොවන විට $\tan\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ ලෙස ආදේශ කර inverse ලෙස ලියන්න

$$\boxed{-\tan\theta = \tan(-\theta)}$$

③ $\tan x = -1$

$\tan x = -\tan\frac{\pi}{4}$

$\tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$x = n\pi + \left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$x = n\pi - \frac{\pi}{4}$

$(n \in \mathbb{Z})$

④ $\tan^2 x = 3$

$\tan x = \pm\sqrt{3}$

$(+)$	$(-)$
$\tan x = +\sqrt{3}$	$\tan x = -\sqrt{3}$
$\tan x = \tan\frac{\pi}{3}$	$\tan x = -\tan\frac{\pi}{3}$
$x = n\pi + \frac{\pi}{3}$	$x = n\pi - \frac{\pi}{3}$

$(n \in \mathbb{Z})$

⑤ $\tan^3 x = \tan x$

දෙපැත්ත කපා නොහැකි වේ

$\tan^3 x - \tan x = 0$

$\tan x(\tan^2 x - 1) = 0$

$(\tan x)(\tan x - 1)(\tan x + 1) = 0$

$\tan x = 0$	$\tan x - 1 = 0$	$\tan x + 1 = 0$
$\tan x = \tan 0$	$\tan x = 1$	$\tan x = -1$
$x = n\pi + 0$	$\tan x = \tan\frac{\pi}{4}$	$\tan x = -\tan\frac{\pi}{4}$
$x = n\pi$	$x = n\pi + \frac{\pi}{4}$	$\tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
		$x = n\pi - \frac{\pi}{4}$

$(n \in \mathbb{Z})$

⑥ $\tan^2 x - (\sqrt{3} + 1)\tan x + \sqrt{3} = 0$

$\tan x(\tan x - \sqrt{3}) - 1(\tan x - \sqrt{3}) = 0$

$(\tan x - 1)(\tan x - \sqrt{3}) = 0$

$\tan x - 1 = 0$	$\tan x - \sqrt{3} = 0$
$\tan x = \tan\frac{\pi}{4}$	$\tan x = \sqrt{3}$
$x = n\pi + \frac{\pi}{4}$	$\tan x = \tan\frac{\pi}{3}$
	$x = n\pi + \frac{\pi}{3}$

$(n \in \mathbb{Z})$

⑦ $\tan 2x = -\sqrt{3}$

$\tan 2x = -\tan\frac{\pi}{3}$

$\tan 2x = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$2x = n\pi + \left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$x = \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$

$(n \in \mathbb{Z})$

⑧ $\tan\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$4x - \frac{\pi}{3} = n\pi + \frac{\pi}{6}$

$4x = n\pi + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}$

$4x = n\pi + \frac{3\pi}{6}$ ($=\frac{\pi}{2}$)

$x = \frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

$(n \in \mathbb{Z})$

II $\sin x = \sin\alpha$ ආකාරය :

$\sin x = \sin\alpha$ නම්,

$x = n\pi + (-1)^n \alpha$

මෙහි

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$n \in \mathbb{Z}$

① $\sin^2 x = \sin x$

$\sin^2 x - \sin x = 0$

$\sin x(\sin x - 1) = 0$

$\sin x = 0$	$\sin x - 1 = 0$
$\sin x = \sin 0$	$\sin x = 1$
$x = n\pi + 0$	$\sin x = \sin\frac{\pi}{2}$
$x = n\pi$	$x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{2}$

$(n \in \mathbb{Z})$

$$\boxed{-\sin\theta = \sin(-\theta)}$$

(6) $4\sin^2 x = 1$

$4\sin^2 x - 1 = 0$

$(2\sin x - 1)(2\sin x + 1) = 0$

$2\sin x - 1 = 0$

$2\sin x = 1$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$

$x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$

$2\sin x + 1 = 0$

$2\sin x = (-1)$

$\sin x = (-\frac{1}{2})$

$\sin x = -\sin\pi/6$

$\sin x = \sin(-\frac{\pi}{6})$

$x = n\pi + (-1)^n(-\frac{\pi}{6})$

$x = n\pi + (-1)^n(-\frac{\pi}{6})$

$x = n\pi - (-1)^n\frac{\pi}{6}$

$(n \in \mathbb{Z})$

(9) $\sin x = \underbrace{\frac{1}{5}}_{\sin\alpha \text{ ලෙස ගනිමු}}$

$\sin x = \sin\alpha$

$x = n\pi + (-1)^n\alpha$ $\quad \sin\alpha = \frac{1}{5}$

$x = n\pi + (-1)^n \sin^{-1}(1/5)$ $\quad \alpha = \sin^{-1}(1/5)$

$(n \in \mathbb{Z})$

වැදගත්:– sin හා cos අගයන්ට [illegible] පහත [illegible]

$-1 \leq \sin x \leq 1$
$-1 \leq \cos x \leq 1$

(4) $\sin^3 x = 4\sin x$

$\sin x(\sin^2 x - 4) = 0$

$(\sin x)(\sin x - 2)(\sin x + 2) = 0$

$\sin x = 0$

$\sin x = \sin 0$

$x = n\pi$

$\sin x - 2 = 0$

$\sin x = 2$

$\#$

$\sin x + 2 = 0$

$\sin x = (-2)$

$\#$

$x = n\pi$

$(n \in \mathbb{Z})$

(5) $\sin(3x - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(3x - \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{3}$

$3x - \frac{\pi}{6} = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}$

$x = \frac{n\pi}{3} + (-1)^n\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{18}$

$(n \in \mathbb{Z})$

III $\cos x = \cos\alpha$ ආකාරය

$\cos x = \cos\alpha$ නම්,
$x = 2n\pi \pm \alpha$
මෙහි, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$
$(n \in \mathbb{Z})$

(1) $\cos^2 x = \cos x$

$\cos x(\cos x - 1) = 0$

$\cos x = 0$

$\cos x = \cos\frac{\pi}{2}$

$x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$

$x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$

$\cos x = 1$

$\cos x = \cos 0$

$x = 2n\pi \pm 0$

$x = 2n\pi$

$x = 2n\pi$

$(n \in \mathbb{Z})$

(4) $\cos x = \underbrace{\frac{1}{7}}_{\cos\alpha \text{ ලෙස ගනිමු.}}$

$\cos x = \cos\alpha$

$x = 2n\pi \pm \alpha$ $\quad \cos\alpha = \frac{1}{7}$

$\alpha = \cos^{-1}(1/7)$

$x = 2n\pi \pm \cos^{-1}(1/7)$

$(n \in \mathbb{Z})$

(5) $\cos^2 x - 5\cos x + 4 = 0$

$(\cos x - 4)(\cos x - 1) = 0$

$\cos x - 4 = 0$

$\cos x = 4$

$\#$

$\cos x - 1 = 0$

$\cos x = 1$

$\cos x = \cos 0$

$x = 2n\pi$

$(n \in \mathbb{Z})$

$$\boxed{-\cos\theta = \cos(\pi - \theta)}$$

⑥ $4\cos^2 x - 1 = 0$

$4\cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = \frac{1}{4}$

$\cos x = \pm\frac{1}{2}$

$\cos x = +\frac{1}{2}$	$\cos x = -\frac{1}{2}$
$\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$	$\cos x = -\cos\frac{\pi}{3}$
$x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$	$\cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$
	$\cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
	$x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

$(n \in \mathbb{Z})$

විසඳු ගැටලු

① $\sin 5x = \sin 3x$

$5x = n\pi + (-1)^n 3x$

$5x - (-1)^n 3x = n\pi$

$x\left(5 - (-1)^n 3\right) = n\pi$

$x = \dfrac{n\pi}{[5 - (-1)^n 3]}$

$(n \in \mathbb{Z})$

② $\tan x = \cot x$

1 ක්‍රමය

$\tan x = \frac{1}{\tan x}$

$\tan^2 x = 1$

$\tan x = \pm 1$

$\tan x = +1$	$\tan x = -1$
$\tan x = \tan\frac{\pi}{4}$	$\tan x = -\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)$
$x = n\pi + \frac{\pi}{4}$	$\tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
	$x = n\pi - \frac{\pi}{4}$

$(n \in \mathbb{Z})$

2 ක්‍රමය

$\tan x = \cot x$

$\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$x = n\pi + \frac{\pi}{2} - x$

$2x = n\pi + \frac{\pi}{2}$

$x = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

$(n \in \mathbb{Z})$

මිශ්‍රතා ත්‍රිකෝණමිතික සමීකරණයන් ක්‍රමකිහිපයකට විසඳිය හැකිය. එහිදී ඕනෑම ක්‍රමයක් භාවිත කළ හැක

③ $\tan 5x = \cot 2x$

$\tan 5x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

$5x = n\pi + \frac{\pi}{2} - 2x$

$7x = n\pi + \frac{\pi}{2}$

$x = \frac{n\pi}{7} + \frac{\pi}{14}$

$(n \in \mathbb{Z})$

④ $\sin 5x = \cos 3x$

1 ක්‍රමය

$\sin 5x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$

$5x = n\pi + (-1)^n\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$

$5x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{2} - (-1)^n 3x$

$5x + (-1)^n 3x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{2}$

$x = \dfrac{n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{2}}{[5 + (-1)^n 3]}$

$(n \in \mathbb{Z})$

2 ක්‍රමය

$\sin 5x = \cos 3x$

$\cos\left(\pi/2 - 5x\right) = \cos 3x$

$\frac{\pi}{2} - 5x = 2n\pi \pm 3x$

(+)	(−)
$\frac{\pi}{2} - 5x = 2n\pi + 3x$	$\frac{\pi}{2} - 5x = 2n\pi - 3x$
$8x = \frac{\pi}{2} - 2n\pi$	$2x = \frac{\pi}{2} - 2n\pi$
$x = \frac{\pi}{16} - \frac{n\pi}{4}$	$x = \frac{\pi}{4} - n\pi$

$(n \in \mathbb{Z})$

(5) $\cos 2x = \cos x$

1 ක්‍රමය

$2x = 2n\pi \pm x$

(+)	(−)
$2x = 2n\pi + x$	$2x = 2n\pi - x$
$x = 2n\pi$	$x = \frac{2n\pi}{3}$

$(n \in \mathbb{Z})$

2 ක්‍රමය

$\cos 2x = \cos x$

$\cos 2x - \cos x = 0$

$2\cos^2 x - 1 - \cos x = 0$

$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

$(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$

$2\cos x + 1 = 0$	$\cos x - 1 = 0$
$\cos x = -\frac{1}{2}$	$\cos x = 1$
$\cos x = -\cos\frac{\pi}{3}$	$\cos x = \cos 0$
$\cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$	$x = 2n\pi \pm 0$
$\cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$	$x = 2n\pi$
$x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$	

$(n \in \mathbb{Z})$

3 ක්‍රමය

$\cos 2x = \cos x$

$\cos 2x - \cos x = 0$

$-2\sin\left(\frac{2x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x-x}{2}\right) = 0$

$\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$

$\sin\left(\frac{3x}{2}\right) = 0$	$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$
$\sin\left(\frac{3x}{2}\right) = \sin 0$	$\sin\frac{x}{2} = \sin 0$
$\frac{3x}{2} = n\pi - (-1)^n 0$	$\frac{x}{2} = n\pi$
$x = \frac{2n\pi}{3}$	$x = 2n\pi$

$(n \in \mathbb{Z})$

සාමාන්‍ය ත්‍රිකෝණමිතික සමීකරණ
සමාධාන ගැටලු විසඳීමේ ක්‍රම

1. එකලිත ත්‍රිකෝණමිතිය ආකාරය සමාධානකිරීම
2. පොදු පද සාධකකරණය කිරීම මගින් සමාධානකිරීම
3. ද්වි ගුණිතය ක්‍රම මගින් සාධක වෙදීම
4. sin, cos සමාකාර ගැටලුවලදී. කොටස, (C+D) හා (C−D) සූත්‍ර භාවිතයෙන්

(6) $\cos 9x + \cos 5x = \sin 7x + \sin 3x$

$\cancel{2}\cos\left(\frac{9x+5x}{2}\right)\cos\left(\frac{9x-5x}{2}\right) = \cancel{2}\sin\left(\frac{7x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{7x-3x}{2}\right)$

$\cos(7x)\cos(2x) = \sin(5x)\cos(2x)$

කපන්නට එපා
විසඳුම් යනවා

$\cos 2x\left[\cos 7x - \sin 5x\right] = 0$

$\cos 2x\left(\cos 7x - \sin 5x\right) = 0$

$\cos 2x = 0$	$\cos 7x - \sin 5x = 0$
$\cos 2x = \cos\frac{\pi}{2}$	$\cos 7x = \sin 5x$
$2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right) = \sin 5x$
$x = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2} - 7x = n\pi + (-1)^n 5x$
	$\frac{\pi}{2} - n\pi = x(7 + (-1)^n 5)$
	$x = \frac{\frac{\pi}{2} - n\pi}{(7 + (-1)^n 5)}$

or

$\cos 7x = \sin 5x$

$\cos 7x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)$

$7x = 2n\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)$

(+)	(−)
$7x = 2n\pi + \frac{\pi}{2} - 5x$	$7x = 2n\pi - \frac{\pi}{2} + 5x$
$12x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$	$2x = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$
$x = \frac{n\pi}{6} + \frac{\pi}{24}$	$x = n\pi - \frac{\pi}{4}$

$(n \in \mathbb{Z})$

ත්‍රිකෝණමිතික සමීකරණවල විසඳුම්

පොදු විසඳුම

පියවර:-

① පොදු විසඳුම සාමාන්‍ය විසඳුම ලබාගන්න.

② $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ වලින් nට අගයන් $0, +1, -1, +2, -2$ ලෙස එකින් එකට ආදේශ කර xට ලැබෙන අගයන් ලබාගෙන එම අගය දී ඇති ප්‍රාන්තරයේ තිබේද යන්න පරීක්ෂා කර බලන්න. ප්‍රාන්තර වර්ග $( ), [ ], ( ], [ )$

① $\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left(-\frac{\pi}{2}\right) < x < \frac{\pi}{2}$ සඳහා විසඳන්න.

$$\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin 2x = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$2x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{8}$$

$(-1)^0 = 1$

$(-2)^0 = 1$

$(2)^0 = 1$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$n = 0$	$n = +1$	$n = (-1)$
$x = 0 \times \frac{\pi}{2} + (-1)^0\frac{\pi}{8}$	$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$	$x = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$
$x = 0 + \frac{\pi}{8}$	$x = \frac{3\pi}{8}$	$x = -\frac{5\pi}{8}$
$x = +\frac{\pi}{8}$ ✓	✓	✗
$\left[+\frac{4\pi}{8} > +\frac{\pi}{8}\right]$	$\left[\frac{4\pi}{8} > \frac{3\pi}{8}\right]$	$\left[-\frac{4\pi}{8} < -\frac{5}{8}\pi\right]$

$$x = \left(+\frac{\pi}{8}\right), \quad x = \frac{3\pi}{8}$$

② $\cos x = \frac{1}{2}$ සමීකරණය, $x \in [-\pi, \pi]$ සඳහා විසඳන්න.

$$\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$(+)$

$$x = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$n = 0$	$n = +1$	$n = -1$
$x = \frac{\pi}{3}$	$x = 2\pi + \frac{\pi}{3}$	$x = -2\pi + \frac{\pi}{3}$
		$x = -\frac{5\pi}{3}$
✓	✗	✗

$$x = \frac{\pi}{3} \quad — ①$$

$(-)$

$$x = 2n\pi - \frac{\pi}{3}$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$n = 0$	$n = +1$	$n = (-1)$
$x = -\frac{\pi}{3}$	$x = 2\pi - \frac{\pi}{3}$	$x = -2\pi - \frac{\pi}{3}$
✓	✗	✗

$$x = -\frac{\pi}{3} \quad — ②$$

①, ②

$$x = \frac{\pi}{3}, \quad x = \left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

② $a\cos x + b\sin x = c$ ආකාරය

පියවර :- ① සමීකරණයේ දෙපසම $\div \sqrt{a^2+b^2}$ කරන්න.

② සංගුණක වලට

$\cos\alpha$	$\longrightarrow$	$\sin\alpha$
$\sin\alpha$	$\longrightarrow$	$\cos\alpha$ ට

ආදේශ කරන්න.

③ සුදුසු සූත්‍රය $\cos(A-B)$, $\cos(A+B)$, $\sin(A-B)$, $\sin(A+B)$ ආකාරයෙන් එකක් බවට හරවන්න.

④ සමීකරණය විසඳන්න.

① $a\cos x + b\sin x = c$ විසඳන්න. සාධාරණ විසඳුම

ව xලබාගන්න.

$$a\cos x + b\sin x = c$$

$$\div \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{=\cos\alpha}\cos x + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{=\sin\alpha}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$(x-\alpha)$ ලෙසත් ලිවිය හැක

$$\cos(\alpha - x) = \underbrace{\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{=\cos\beta}$$

$$\cos(x - \alpha)$$

$$(\cancel{\alpha} - \cancel{x}) = 2n\pi \pm \beta$$

$$x = +(2n\pi \pm \beta) + \alpha$$

$$x = 2n\pi \pm \beta + \alpha$$

$$x = 2n\pi \pm \cos^{-1}\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

*$a\cos\theta + b\sin\theta = c$ ආකාරයේ සමීකරණ [illegible] මෙම ක්‍රමයෙන් විසඳිය හැක.

(2) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$

$\div \sqrt{3+1}$

$\div 2$

$\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos\frac{\pi}{6}}\cos x - \underbrace{\frac{1}{2}}_{\sin\frac{\pi}{6}}\sin x = \frac{1}{2}$

$\cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x = \frac{1}{2}$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$\cancel{x+\alpha = 2n\pi \pm \frac{1}{2}}$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$

$x+\frac{\pi}{6} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(+)

$x+\frac{\pi}{6} = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$

$x = 2n\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$

$x = 2n\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$

$x = 2n\pi + \frac{\pi}{6}$

(−)

$x+\frac{\pi}{6} = 2n\pi - \frac{\pi}{3}$

$x = 2n\pi - \frac{3\pi}{6}$

$x = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$

$(n \in \mathbb{Z})$

(3) $\cos x + \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\div \sqrt{1^2+1^2}$

$\div \sqrt{2}$

$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos\frac{\pi}{4}}\cos x + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\sin\frac{\pi}{4}}\sin x = \frac{1}{2}$

$\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{1}{2}$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$

$x-\frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(+)

$x-\frac{\pi}{4} = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$

$x = 2n\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$

$x = 2n\pi + \frac{7\pi}{12}$

(−)

$x-\frac{\pi}{4} = 2n\pi - \frac{\pi}{3}$

$x = 2n\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$

$x = 2n\pi - \frac{\pi}{12}$

$(n \in \mathbb{Z})$

(4) $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 1$ සමීකරණය $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ පරාසය සඳහා විසඳන්න

$\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 1$

$\div \sqrt{1+3}$

$\div 2$

$\underbrace{\frac{1}{2}}_{\cos\frac{\pi}{3}}\sin 2x + \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\sin\frac{\pi}{3}}\cos 2x = \frac{1}{2}$

$\cos\frac{\pi}{3}\sin 2x + \sin\frac{\pi}{3}\cos 2x = \frac{1}{2}$

$\sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right) = \sin\frac{\pi}{6}$

$\frac{\pi}{3}+2x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

$x = \frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6}$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$n=0$

$x = \frac{0\pi}{2} + (-1)^0\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6}$

$x = \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6}$

$x = -\frac{\pi}{12}$ ✗

$n=1$

$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6}$

$x = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{12}$

$x = \frac{3\pi}{12}$ ✓

$(n \in \mathbb{Z})$

$x = \frac{3\pi}{12}$

(05) $a\cos^2 x + b\sin x\cos x + c\sin^2 x = d$ ආකාරයේ

$\cos^2 x =$	$\frac{1+\cos 2x}{2}$
$\sin^2 x =$	$\frac{1-\cos 2x}{2}$
$\sin x \cdot \cos x =$	$\frac{\sin 2x}{2}$

මෙවිට $\cos^2 x, \sin^2 x, \sin x, \cos x, \cos 2x, \sin 2x$ වලින් ආදේශ කිරීමෙන්

$A\cos 2x + B\sin 2x = C$

ආකාරයට හරවා ගත හැක

(04) ගැටලු ආකාරයට විසඳා ගැනීම.

① $3\cos^2 x + \sin x \cos x - \sin^2 x = 2$

$3\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) + \frac{\sin 2x}{2} - \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) = 2$

$\times 2$

$3 + 3\cos 2x + \sin 2x - 1 + \cos 2x = 4$

$4\cos 2x + \sin 2x = 2$

$\div \sqrt{16+1}$

$\div \sqrt{17}$

$\underbrace{\frac{4}{\sqrt{17}}}_{=\cos\alpha}\cos 2x + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{17}}}_{=\sin\alpha}\sin 2x = \frac{2}{\sqrt{17}}$

$\cos\alpha\cos 2x + \sin\alpha\sin 2x = \frac{2}{\sqrt{17}}$

$\cos(\alpha - 2x) = \underbrace{\frac{2}{\sqrt{17}}}_{\cos\beta}$

$\alpha - 2x = 2n\pi \pm \beta$

(+)

$\alpha + 2n\pi - \beta = 2x$

$x = \frac{\alpha}{2} - n\pi - \frac{\beta}{2}$

$x = \frac{\cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)}{2} - n\pi - \frac{\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{17}}\right)}{2}$

(−)

$\alpha - 2x = 2n\pi - \beta$

$\alpha - 2n\pi + \beta = 2x$

$x = \frac{\alpha}{2} - n\pi + \frac{\beta}{2}$

$x = \frac{\cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)}{2} - n\pi + \frac{\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{17}}\right)}{2}$

$(n \in \mathbb{Z})$

② $\cos^2 x - 2\sin x\cos x - \sin^2 x = 1$

1 ක්‍රමය

$\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) - 2\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) - \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) = 2$

$\cancel{1} + \cos 2x - 2\sin 2x \cancel{-1} + \cos 2x = 2$

$2\cos 2x - 2\sin 2x = 2$

$\div 2$ $\quad \cos 2x - \sin 2x = 1$

$\div \sqrt{1+1}$

$\div \sqrt{2}$ $\quad \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos\frac{\pi}{4}}\cos 2x - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\sin\frac{\pi}{4}}\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$

$2x + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

$x = \frac{\cancel{2}n\pi}{\cancel{2}} \pm \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8}$

(+)

$x = n\pi + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8}$

$x = n\pi$

(−)

$x = n\pi - \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8}$

$x = n\pi - \frac{2\pi}{8}$

$x = n\pi - \frac{\pi}{4}$

$(n \in \mathbb{Z})$

2 ක්‍රමය

$\cos^2 x - 2\sin x\cos x - \sin^2 x = 1$

$\underbrace{\cos^2 x - \sin^2 x}_{} - 2\sin x\cos x = 1$

$\cos 2x \quad - 2\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) = 1$

$\cos 2x - \sin 2x = 1$

$\div \sqrt{2}$

$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos\frac{\pi}{4}}\cos 2x - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos\frac{\pi}{4}}\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \cos\frac{\pi}{4}$

⋮

(+) $\quad x = n\pi$

(−) $\quad x = n\pi - \frac{\pi}{4}$

$(n \in \mathbb{Z})$

සූත්‍ර

$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

ප්‍රශ්නවලදී සුළු කිරීම් කිරීමට භාවිතා වේ.

③ $10\cos^2\frac{x}{2} + 6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\sin^2\frac{x}{2} = 11$

$\overset{5}{\cancel{10}}\left(\frac{1+\cos x}{2}\right) + \overset{3}{\cancel{6}}\left(\frac{\sin x}{2}\right) + 2\left(\frac{1-\cos x}{2}\right) = 11$

$6 + 5\cos x + 3\sin x - \cos x = 11$

$4\cos x + 3\sin x = 5$

$4\cos x + 3\sin x = 5$

$\div \sqrt{16+9}$

$\div \sqrt{25}$
$\div 5$ $\quad \underbrace{\frac{4}{5}}_{\cos\alpha}\cos x + \underbrace{\frac{3}{5}}_{\sin\alpha}\sin x = \frac{5}{5} = 1$

~~$\cos(\alpha - x) = \underbrace{\frac{5}{5}}_{=\cos\beta} = 1$~~

$\alpha - x = 2n\pi \pm \beta$

$\cos(\alpha - x) = 1$

$\cos(\alpha - x) = \cos 0$

$\alpha - x = 2n\pi \pm 0$

$\alpha - 2n\pi = x$

$\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) - 2n\pi = x$

$(n \in \mathbb{Z})$

සමගාමී ත්‍රිකෝණමිතික සමීකරණ.

① $\sin x + \cos y = 1 \;,\; \cos 2x - \cos 2y = 1$

සමගාමී සමීකරණ විසඳන්න

x, y අගය සොයන්න

$\sin x + \cos y = 1$ — ①

$\cos 2x - \cos 2y = 1$ — ②

①/ $\cos y = (1 - \sin x)$ — ③

②/ $\cos 2x = \cos 2y = 1$

$\left(\frac{1 + \cos x}{2}\right) - \left(\frac{1 + \cos y}{2}\right) = 1$

$\cancel{\frac{1}{2}} + \frac{\cos x}{2} - \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{\cos y}{2} = 1$

$\cos x - \cos y = 2$ ③ ආදේශයෙන්

$\cos x - 1 + \sin x = 2$

$\cos x + \sin x = 3$

$\div \sqrt{2}$

$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos\frac{\pi}{4}} \cos x + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\sin\frac{\pi}{4}} \sin x = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\frac{\pi}{6}$

$\frac{\pi}{4} - x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

$x = \frac{\pi}{4}$ ආදේශ. y සොයා.

එනකොට

$\sin\frac{\pi}{4}$ $\cos\frac{\pi}{4}$ නිසා

$\sin y$ ගන්නත් පුළුවන්.

↓ $\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\sin\frac{\pi}{4}} \cos x + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos\frac{\pi}{4}} \sin x = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sin\frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{4} + x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}$

$x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිතවල ප්‍රතිලෝම (inverse) අඩංගු ගැටලු

* අගයකට අදාළ ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිතයේ අගය එකවරම නොදන්නේ නම් ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිත දමා එම ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිතය දමයි

?. උදා

$(\tan\theta + 1)^2 - 2 = 0$

$(\tan\theta + 1 - \sqrt{2})(\tan\theta + 1 - \sqrt{2}) = 0$

$\tan\theta + 1 - \sqrt{2} = 0$ හෝ $\tan\theta + 1 + \sqrt{2} = 0$

$\tan\theta = \sqrt{2} \cancel{+} 1$ $\qquad \tan\theta = -\sqrt{2} - 1$

$\tan\theta = \tan\left[\tan^{-1}(\sqrt{2} - 1)\right]$ $\qquad \tan\theta = \tan\left[\tan^{-1}(-\sqrt{2} - 1)\right]$

$\theta = n\pi + \tan^{-1}(\sqrt{2} - 1)$ $\cancel{\theta = \tan}$

$\theta = n\pi + \tan^{-1}(-\sqrt{2} - 1)$

$n \in \mathbb{Z}$

ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිතයන්

- ශ්‍රිතයන්ගේ අවම උපරිම අගයන් සෙවීම
- එම ශ්‍රිතයන්ට තිබිය හැකි අගය පරාසයන් සෙවීම.

ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිතයන් ගැටලු ආකාර

① ප්‍රධාන ආකාරය.
$a\sin x + b$ ආකාරය
$a\cos x + b$ ආකාරය

② $a\cos x + b\sin x + c$ ආකාරය

③ $a\cos^2 x + b\sin x\cos x + c\sin^2 x + d$ ආකාරය

④ මිශ්‍රිතවල

$-1 \le \sin x \le 1$	$-1 \le \cos x \le 1$

① (i) $a\sin x + b$ ආකාරය

① පහත දී ඇති ශ්‍රිතයන්හි උපරිම හා අවම අගයන් සොයන්න.

(i) $f(x) = 7\sin x + 4$

1 ක්‍රමය

$f(x)_{උපරිම} = 7\underbrace{\sin x}_{=1} + 4$

$= 11$

$f(x)_{අවම} = 7\underbrace{\sin x}_{=(-1)} + 4$

$= (-3)$

$-3 \le f(x) \le 11$

2 ක්‍රමය

$\underbrace{f(x)}_{=E} = 7\sin x + 4$

$E = 7\sin x + 4$

$\sin x = \frac{(E-4)}{7}$

$-1 \le \sin x \le 1$

$-7 \le \cancel{E-4} \le 7$

$-7+4 \le E \le 7+4$

$-3 \le E \le 11$

$-3 \le f(x) \le 11$

② $f(x) = 9\sin 5x + 11$ වේ.

(i) $f(x)$ උපරිම අගය, අවම අගය
(ii) $f(x)$ උපරිම වන x සොයන්න
(iii) $f(x)$ අවම වන x සොයන්න.

(i) $f(x)_{උපරිම} = 9\underbrace{\sin 5x}_{=1} + 11$

$= 20$

$f(x)_{අවම} = 9(-1) + 11$

$= 2$

(ii) $f(x)$ උපරිම වන විට,

$\sin 5x = 1$

$\sin 5x = \sin\frac{\pi}{2}$

$5x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{2}$

$x = \frac{n\pi}{5} + (-1)^n\frac{\pi}{10} \quad (n \in \mathbb{Z})$

(iii) $f(x)$ අවම වන විට,

$\sin 5x = -1$

$\sin 5x = -\sin\frac{\pi}{2}$

$\sin 5x = \sin(-\frac{\pi}{2})$

$5x = n\pi + (-1)^n(-\frac{\pi}{2})$

$x = \frac{n\pi}{5} - (-1)^n\frac{\pi}{10} \quad (n \in \mathbb{Z})$

(iv) $f(x)$ ගත හැකි අගය පරාසය ලියන්න

$2 \le f(x) \le 20$

$f(x)$, 20ත් 2ත් අතර පවතී.

③ $f(x) = 5 - 4\sin x$

$f(x)_{උපරිම} = 5 - 4\underbrace{\sin x}_{(-1)}$

$= 5 + (-4)(-1)$

$= 5 + 4$

$= 9$

$f(x)_{අවම} = 5 - 4\underbrace{\sin x}_{1}$

$= 5 - 4$

$= 1$

$1 \le f(x) \le 9$

(ii) $a\cos x + b$ ආකාරය:

① $f(x) = 9 - 5\cos x$

1 ක්‍රමය

$$f(x)_{උපරිම} = 9 - 5\underbrace{\cos x}_{(-1)}$$

$$= 9 + 5$$
$$= 14$$

$$f(x)_{අවම} = 9 - 5\underbrace{\cos x}_{(+1)}$$

$$= 9 - 5$$
$$= 4$$

2 ක්‍රමය

$$\underbrace{f(x)}_{=E} = 9 - 5\cos x$$

$$E = 9 - 5\cos x$$
$$5\cos x = 9 - E$$
$$\cos x = \frac{9-E}{5}$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$
$$-1 \leq \frac{9-E}{5} \leq 1$$
$$-5-9 \leq -E \leq 5-9$$
$$-14 \leq -E \leq -4$$
$$14 \geq E \geq 4$$
$$14 \geq f(x) \geq 4$$

② $f(x) = 9 - 7\cos x$

(I) $f(x)$ උපරිම, $f(x)$ අවම

(II) $f(x)$ අවම වන x හි අගය.

(I) $f(x)_{උපරිම} = 9 - 7(-1)$

$$= 9 + 7 = 16$$

$$f(x)_{අවම} = 9 - 7(+1)$$
$$= 9 - 7 = 2$$

$$2 \leq f(x) \leq 16$$

(II) $f(x)$ අවම වීමට,

$$\cos x = 1$$
$$\cos x = \cos 0$$
$$x = 2n\pi \pm 0$$
$$x = 2n\pi$$
$$(n \in \mathbb{Z})$$

③ $a\cos x + b\sin x + c$ ආකාරය

සටහන

① cos හා sin ඉදිරියේ ඇති $\sqrt{a^2+b^2}$ ගණනය කර ඉවත්කර $\left(\frac{a\cos x}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b\sin x}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ ලෙස සකසාගන්න.

② පළමු පදය | දෙවන පදය

$\cos\alpha \longrightarrow \sin\alpha$

$\sin\alpha \longrightarrow \cos\alpha$

③ ගැටලුවේදී $\cos(A-B)$, $\cos(A+B)$, $\sin(A-B)$, $\sin(A+B)$ ආකාරයට ගත හැකි sin හෝ cos වල, වර්ගජ ප්‍රකාශන ආකාරයට සොයන්න (i), (ii) පරිදි සිදුකළ හැකිය

① $f(x) = a\cos x + b\sin x + c$ වේ. $f(x)$ හි උපරිම හා අවම අගයන් සොයන්න

$$f(x) = a\cos x + b\sin x + c$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a\cos x}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b\sin x}{\sqrt{a^2+b^2}}\right] + c$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left[\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\cos\alpha}\cos x + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\sin\alpha}\sin x\right] + c$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left[\cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin x\right] + c$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\cos(\alpha - x) + c$$

$$f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\alpha - x) + c$$

$$f(x)_{උපරිම} = \sqrt{a^2+b^2}\underbrace{\cos(\alpha - x)}_{=1} + c$$

$$f(x)_{උපරිම} = \sqrt{a^2+b^2} + c$$

$$f(x)_{අවම} = \sqrt{a^2+b^2}\underbrace{\cos(\alpha - x)}_{=(-1)} + c$$

$$f(x)_{අවම} = -\sqrt{a^2+b^2} + c$$

② $f(x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x - 1$ වේ.

(I) $f(x) = R\cos(x+\alpha) + \beta$ ආකාරයට දක්වන්න

(II) $f(x)$ උපරිම, අවම සොයන්න

(III) $f(x)$ උපරිම, වන x සොයන්න

(I) $f(x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x - 1$

$= \sqrt{3+1}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right] - 1$

$= 2\left[\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos\frac{\pi}{6}}\cos x - \underbrace{\frac{1}{2}}_{\sin\frac{\pi}{6}}\sin x\right] - 1$

$= 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)\right] - 1$

$f(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) - 1$

$f(x) = R\cos(x+\alpha) + \beta$ ආකාරයට

$\alpha = \frac{\pi}{6}$, $R = 2$, $\beta = (-1)$ වේ

(II) $f(x)$ උපරිම $= 2\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)}_{1} - 1$

$= 1$

$f(x)$ අවම $= 2\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)}_{(-1)} - 1$

$= -3$

$-3 \leq f(x) \leq 1$

(III) $f(x)$ උපරිම වන විට,

$\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 1$

$\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \cos 0$

$\frac{\pi}{6} + x = 2n\pi \pm 0$

$x = 2n\pi - \frac{\pi}{6}$

$(n \in \mathbb{Z})$

③ $f(x) = \sin x - \cos x + 5\sqrt{2}$

(I) $f(x) = R\sin(x-\alpha) + \beta$ ආකාරයට දක්වන්න

(II) $f(x)$ හි අගය පරාසය සොයන්න

$f(x) = \sin x - \cos x + 5\sqrt{2}$

$= \sqrt{2}\left[\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos\frac{\pi}{4}}\sin x - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\sin\frac{\pi}{4}}\cos x\right] + 5\sqrt{2}$

$= \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}\sin x - \sin\frac{\pi}{4}\cos x\right] + 5\sqrt{2}$

$f(x) = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 5\sqrt{2}$

$f(x) = R\sin(x-\alpha) + \beta$ ලෙස ලියන විට

$\therefore R = \sqrt{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = 5\sqrt{2}$

(II) $f(x)_{උපරිම} = \sqrt{2}\underbrace{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}_{1} + 5\sqrt{2}$

$= 6\sqrt{2}$

$f(x)_{අවම} = \sqrt{2}\underbrace{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}_{-1} + 5\sqrt{2}$

$= 4\sqrt{2}$

$4\sqrt{2} \leq f(x) \leq 6\sqrt{2}$

③ $a\cos^2 x + b\sin x\cos x + c\sin^2 x + d$ ආකාරය

$\boxed{\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}}$ $\boxed{\sin x\cos x = \frac{\sin 2x}{2}}$ $\boxed{\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}}$

පියවර ① $\cos^2 x$, $\sin^2 x$ වල $\cos 2x$ ආදේශයෙන්ද
$\sin x\cos x$ වල $\sin 2x$ ආදේශයෙන්ද
ලබා සුළු කරන්න.
ගැටලුව
② $a\cos 2x + b\sin 2x + c$ ආකාරයට
හරවා ගෙන ② ආකාරය
සේ විසඳීම සිදුකරන්න

① $f(x) = \cos^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x - \sin^2 x + 5$ වේ.
(I) $f(x) = A\cos(2x+\alpha) + B$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න.
(II) $f(x)$ වල උපරිම, අවම අගයන් සොයන්න

(I) $f(x) = \cos^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x - \sin^2 x + 5$

$f(x) = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) - \sqrt{3}\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) - \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) + 5$

$= \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + 5$

$= \frac{1}{2}\left[\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x\right] + 5$

$= \frac{1}{2}\left[2\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x\right] + 5$ $\qquad \sqrt{4+3}$ $\quad \sqrt{7}$

$= \frac{\sqrt{7}}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{7}}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\sin 2x\right] + 5$

$= \frac{\sqrt{7}}{2}\left[\cos\alpha\cos 2x - \sin\alpha\sin 2x\right] + 5$

$f(x) = \frac{\sqrt{7}}{2}\cos(\alpha + 2x) + 5$ $\qquad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$, $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$

$f(x) = A\cos(2x+\alpha) + B$ ආකාරයේ

$A = \frac{\sqrt{7}}{2}$, $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$, $B = 5$

(II) ක්‍රමය

$f(x) = \frac{\sqrt{7}}{2}\cos\left[2x + \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)\right] + 5$

$f(x)_{උපරිම} = \frac{\sqrt{7}}{2} \times 1 + 5$

$= \frac{\sqrt{7}+10}{2}$

$f(x)_{අවම} = \frac{\sqrt{7}}{2} \times (-1) + 5$

$= -\frac{\sqrt{7}}{2} + 5$

$= \frac{10-\sqrt{7}}{2}$

පරාසය

$f(x) = \frac{\sqrt{7}}{2}\cos\left[2x + \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)\right] + 5$

$\cos\left(2x + \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)\right) = \frac{(f(x)-5)2}{\sqrt{7}}$

$-1 \leq \cos\theta \leq 1$

$-1 \leq \frac{(f(x)-5)2}{\sqrt{7}} \leq 1$

$+5 - \frac{\sqrt{7}}{2} \leq f(x) \leq +5 + \frac{\sqrt{7}}{2}$

$\frac{(10-\sqrt{7})}{2} \leq f(x) \leq \frac{(10+\sqrt{7})}{2}$

වැදගත්

* සමීකරණවල, ප්‍රස්තාරවල
ප්‍රකාශන ගැටලුවලදී එනම්
ඇතුළත්ද භාවිත කළ හැක.

① ප්‍රශ්නයක් මඟින් සමීකරණ ආකාරයට
හරවා ගැනීම ~~ප්‍රකාශනය = E ලෙස~~

② ප්‍රකාශනය = E ලෙස ගෙන
පොදු ලියා ගැලපෙන තුළ වර්ග
සමීකරණයක් සාදාගත හැකිනම්,
$\Delta \geq 0$ තර්කය යෙදිය හැක.

③ සමහර ගැටලුවලදී පූර්ණ වර්ග
ඇසුරෙන් ලියා ගත හැකිනම්, එනම්
ආකාරයේ තර්ක කිරීමද භාවිතා වේ.

$$\text{එනම් } E = \underbrace{\underbrace{(\quad)^2}_{\geq 0} + 8}_{\geq 8}$$

$$E \geq 8.$$

ත්‍රිකෝණමිතික ප්‍රස්තාර

ප්‍රස්තාර ඇඳීමේ ක්‍රම
- ① සාමාන්‍ය ක්‍රමය
- ② මූල ප්‍රස්තාර ක්‍රමය
- ③ උච්ච, අවම මගින් ප්‍රස්තාර

① සාමාන්‍ය ක්‍රමය
(අගයන් ආදේශ කිරීමේ ක්‍රමය)

එනම් :- $0/\pi$ වල අගයන් x ට ආදේශ කර අනුරූප y අගය ලබාගෙන ප්‍රස්තාරය ඇඳීම.

Note :-

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	1	0	−1	0
$\cos\theta$	1	0	−1	0	1

$\cos 0 = 1$
$\cos\frac{\pi}{2} = 0$
$\cos\frac{3\pi}{2} = 0$
$\cos 2\pi = 1$
$\cos\pi = (-1)$

$\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$
$\cos(-\pi) = -1$
$\cos(-\frac{3\pi}{2}) = 0$

$\sin 0 = 0$
$\sin\frac{\pi}{2} = 1$
$\sin\pi = 0$
$\sin\frac{3\pi}{2} = -1$
$\sin 2\pi = 0$

$\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$
$\sin(-\pi) = 0$
$\sin(-\frac{3\pi}{2}) = 1$

* ත්‍රිකෝණමිතික ප්‍රස්තාරයෙන් අදින විට සරලම ආකාරයට සකස් කර ගත යුතුය

$f(x) = 4(\sin^4 x + \cos^4 x)$

$f(x) = 3 + \cos 4x$ ✓

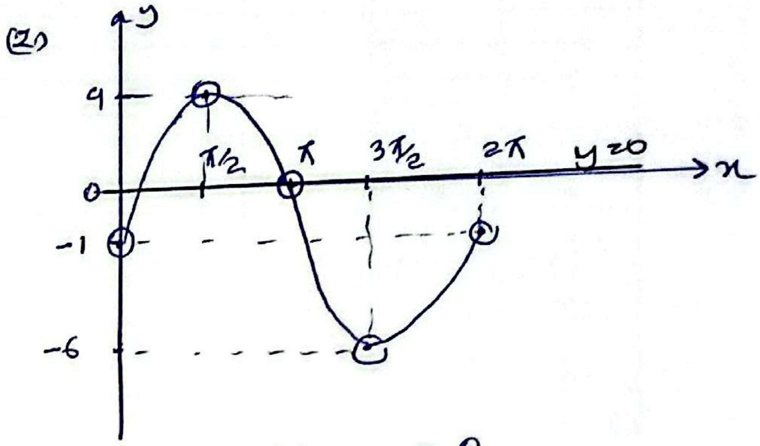
① $y = 5\sin x - 1$

(i) $x \in [0, 2\pi]$ සඳහා ප්‍රස්තාරය අඳින්න.

(ii) එනයින් $5\sin x - 1 = 0$ සමීකරණයට විසඳුම් කීයක් ඇත්ද?

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	−1	0
$5\sin x$	0	5	0	−5	0
$5\sin x - 1$	−1	4	−1	−6	−1

(i)



(ii) $y = 5\sin x - 1$ — ①
$5\sin x - 1 = 0$ — ②
①, ② න් ආදේශයෙන
$y = 0$
විසඳුම් 2ක් ඇත. (ප්‍රස්තාරය මගින් නිගමනය)

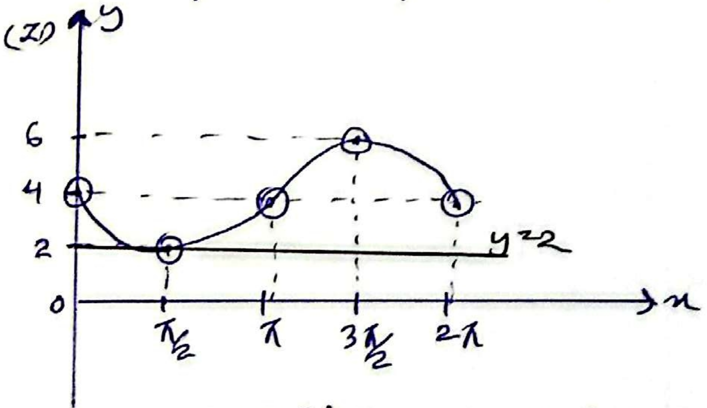
② $y = 4 - 2\sin x$

(i) $0 \leq x \leq 2\pi$ සඳහා ප්‍රස්තාරය අඳින්න

(ii) එනයින් $\sin x = 1$ සමීකරණයට විසඳුම් කීයක්ද, විසඳුම් ලියන්න

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	−1	0
$-2\sin x$	0	−2	0	+2	0
$4 - 2\sin x$	4	2	4	6	4

(i)



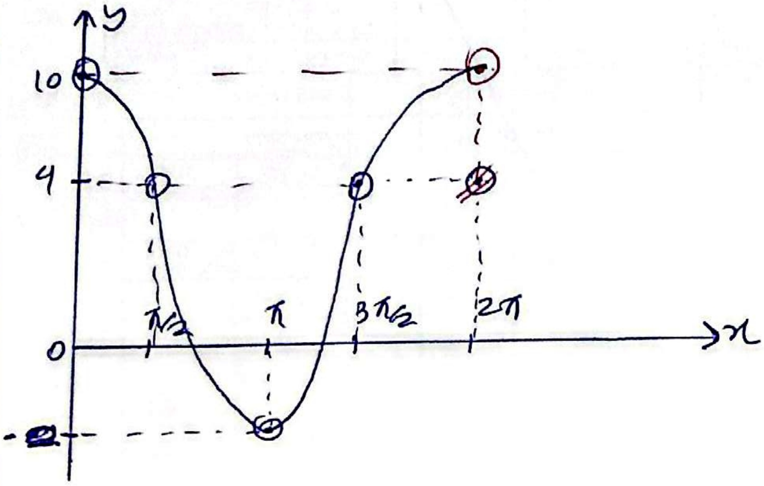
(ii) $y = 4 - 2\underbrace{\sin x}_{=1}$
$y = 4 - 2$
$y = 2$

විසඳුම් 1ක් ඇත
විසඳුම $\frac{\pi}{2}$ වේ
$x = \frac{\pi}{2}$

③ $y = 6\cos x + 4$

$0 \leq x \leq 2\pi$ සඳහා y හි ප්‍රස්තාරය අඳින්න

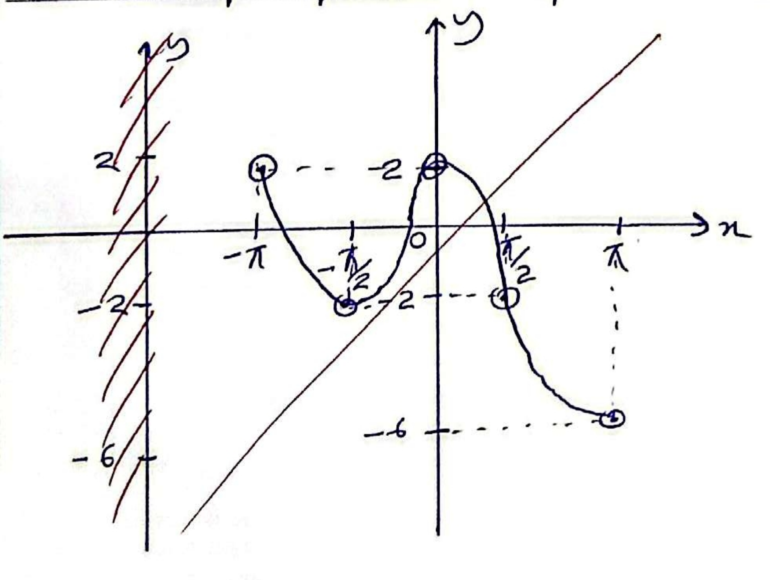
x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	$\cancel{0}\ 1$
$6\cos x$	6	0	-6	0	$\cancel{0}\ 6$
$6\cos x + 4$	10	4	-2	4	$\cancel{4}\ 10$



ආවර්තය x සඳහා,
$x \longrightarrow \pi/2$ දක්වා
$2x$ සඳහා,
$x \longrightarrow \frac{\pi}{4}$ දක්වා
$4x$ සඳහා,
$x \longrightarrow \frac{\pi}{8}$ දක්වා

④ $y = 4\cos 2x - 2$

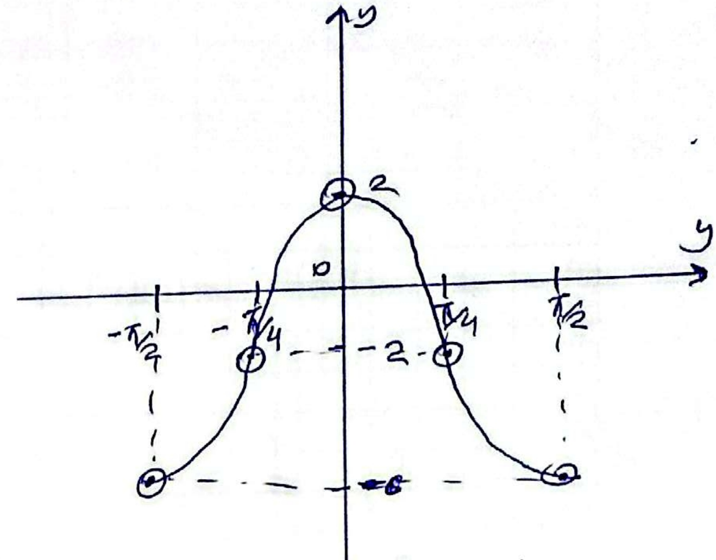
	$(-\pi/2)$	$(-\pi/4)$	0	$\pi/4$	$\pi/2$
x	0	$\cancel{\pi/4}$	$\cancel{\pi/2}$	$\cancel{3\pi/4}$	$\cancel{\pi}$
$2x$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
$\cos 2x$	1	0	1	0	-1
$4\cos 2x$	4	0	4	0	-4
$4\cos 2x - 2$	2	-2	2	-2	-6



$\cos(-x) = \cos x$

④ $y = 4\cos 2x - 2$

x	$-\pi/2$	$-\pi/4$	0	$+\pi/4$	$+\pi/2$
$2x$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
$4\cos 2x$	-4	0	4	0	-4
$4\cos 2x - 2$	-6	-2	2	-2	-6



⑤ (I) $8[\cos^6 x + \sin^6 x] = a + b\cos 4x$ බව පෙන්වා a හා b සොයන්න.
(II) එනයින්, $y = \cos^6 x + \sin^6 x$ ප්‍රස්තාරය $0 \leq x \leq \pi/2$ සඳහා අඳින්න

(I) $\underbrace{8\left[(\cos^2 x)^3 + (\sin^2 x)^3\right]}_{LHS} = a + b\cos x$

LHS
$8(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^4 x - \cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x)$

$= 8(1 - 3\cos^2 x\sin^2 x)$

$= 8\left[1 - 3\frac{(2\cos x\sin x)^2}{4}\right]$

$= 8 - 6(\sin 2x)^2$

$= 8 - 6\left[\frac{1 - \cos 4x}{2}\right]$

$= 8 - 3 + 3\cos 4x$

$= 5 + 3\cos 4x$

$a = 5,\ b = (+3)$

(II) $8[\underbrace{\cos^6 x + \sin^6 x}_{= y}] = a + b\cos 4x$

$8y = 5 + 3\cos 4x$

$y = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$

$$y = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$$

$4x \rightarrow 0, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi$

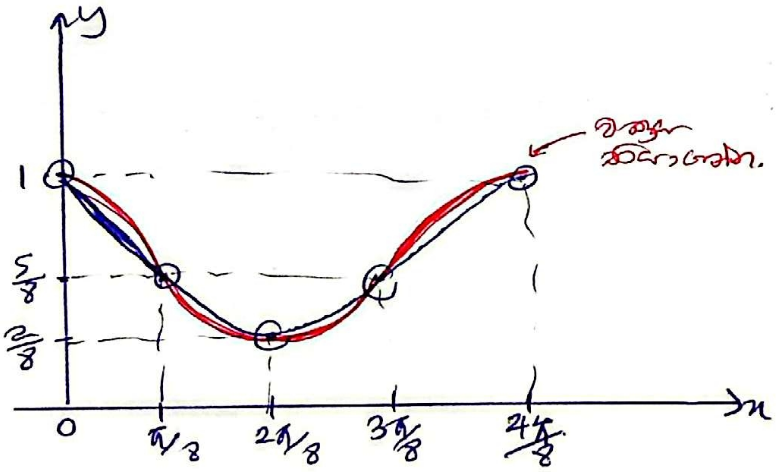
$x = 0$	$x = \frac{\pi}{4}$	$x = \frac{\pi}{2}$
$y = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \times 1$	$y = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \times -1$	$y = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \times 0$
$y = \frac{8}{8} = 1$	$y = \frac{2}{8}$	$y = \frac{5}{8}$
	$y = \frac{1}{4}$	

$x = \frac{3\pi}{4}$

$y = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \times$

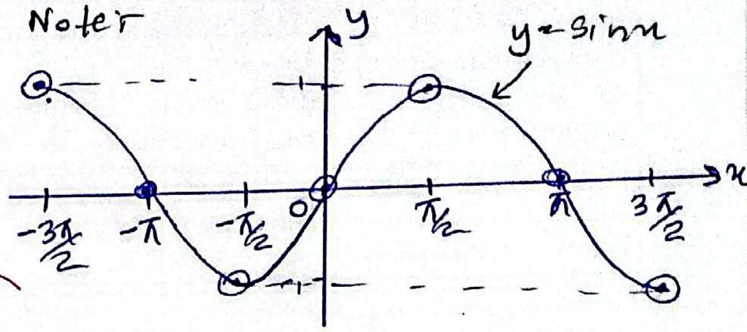
$4x \rightarrow \frac{\pi}{8}, \frac{2\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{4\pi}{8}$

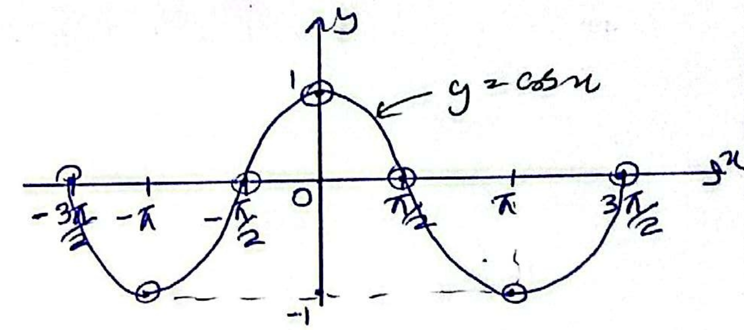
$x = 0$	$x = \frac{\pi}{8}$	$x = \frac{2\pi}{8}$
$y = 1$	$y = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \times 0$	$y = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \times -1$
	$y = \frac{5}{8}$	$y = \frac{2}{8}$
$x = \frac{3\pi}{8}$	$x = \frac{\pi}{2}$	
$y = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \times 0$	$y = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \times 1$	
$y = \frac{5}{8}$	$y = 1$	



② මත ප්‍රස්තාරකරණය

Noter





① පහත ශ්‍රිත වල $0 \le x \le 2\pi$ සඳහා දළ සටහන් අඳින්න.

(i) $y = \sin x - 1$

$\downarrow$ $y = \sin x$

$y = \sin x - 1$

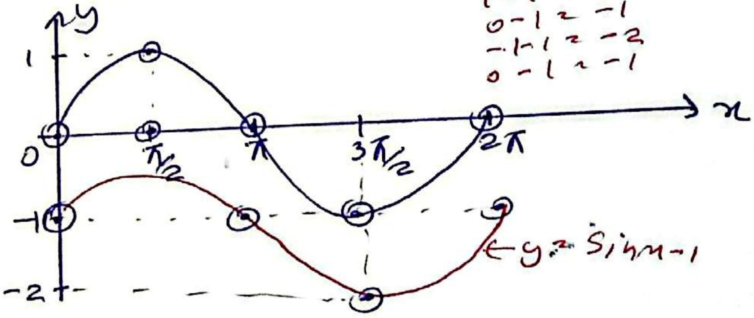
$0 - 1 = -1$

$1 - 1 = 0$

$0 - 1 = -1$

$-1 - 1 = -2$

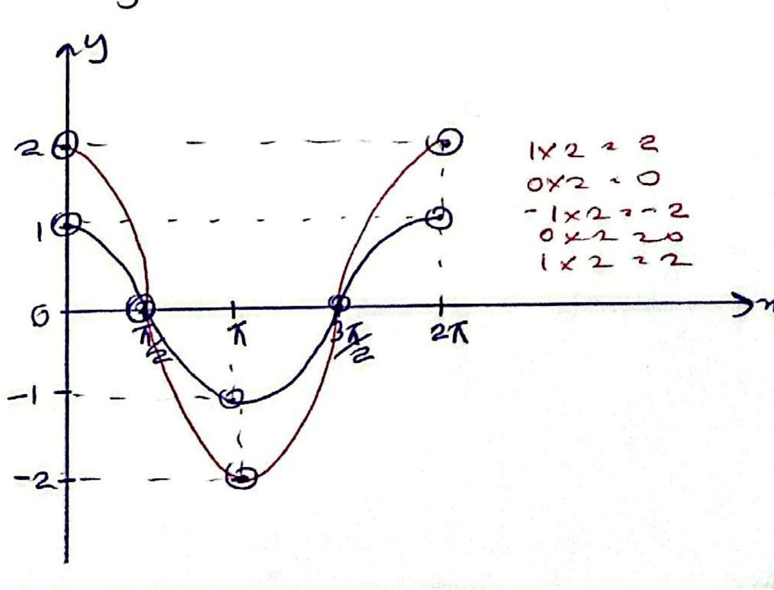
$0 - 1 = -1$



(ii) $y = 2\cos x$

$\downarrow$ $y = \cos x$

$y = 2\cos x$



$1 \times 2 = 2$

$0 \times 2 = 0$

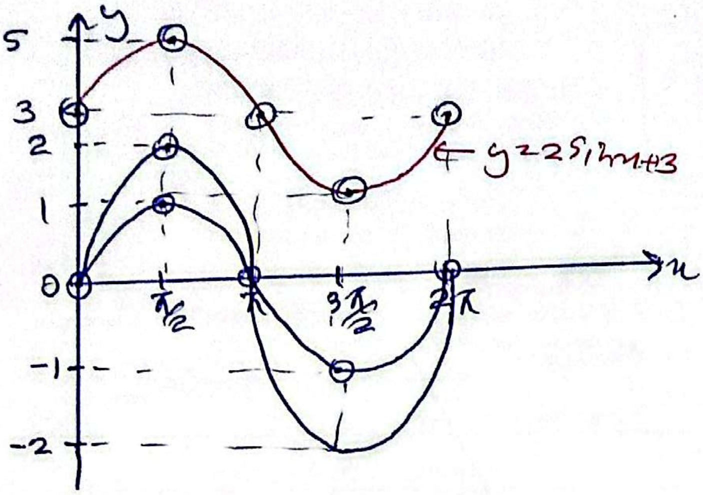
$-1 \times 2 = -2$

$0 \times 2 = 0$

$1 \times 2 = 2$

(iii) $y = 2\sin x + 3$

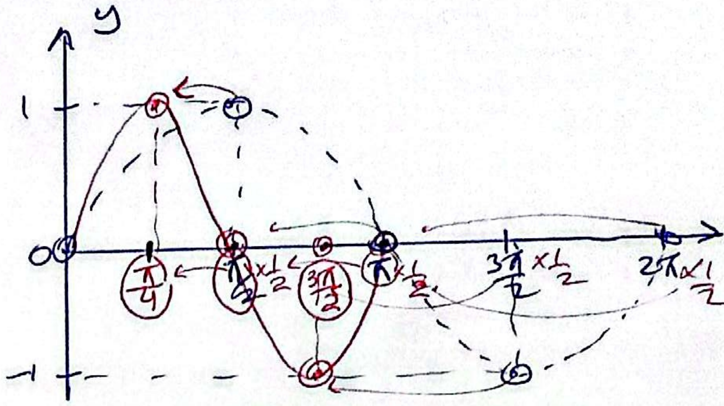
$y = \sin x$
$\downarrow$ $y = 2\sin x$
$y = 2\sin x + 3$



(vi) $y = \sin 2x$

$y = \sin x$

$\boxed{y = \sin 2x \left(\frac{1}{2} \text{ ගුණකයෙන්}\right)}$



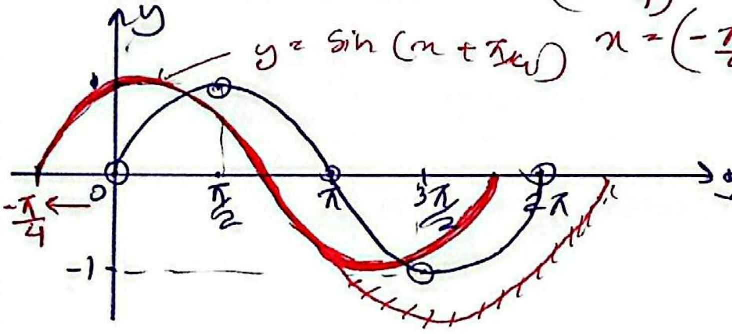
මෙම ප්‍රස්ථාරවල ශ්‍රිතයේ මේ
y අක්ෂයේ අගය නොවෙනස්ව
x අගය පමණක් $\times \left(\frac{1}{\text{ගුණකය}}\right)$
ලෙස ගුණකරගන්නා
නොවෙනස්වලාගේ.

(iv) $y = \sin(x + \pi/4)$

$y = \sin x$
$\downarrow$ $y = \sin(x + \pi/4)$

$\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$x = \left(-\frac{\pi}{4}\right)$



(vii) $y = \sin 4x$

$y = \sin x$

$\boxed{y = \sin 4x \left(\frac{1}{4} \text{ ගුණකය}\right)}$

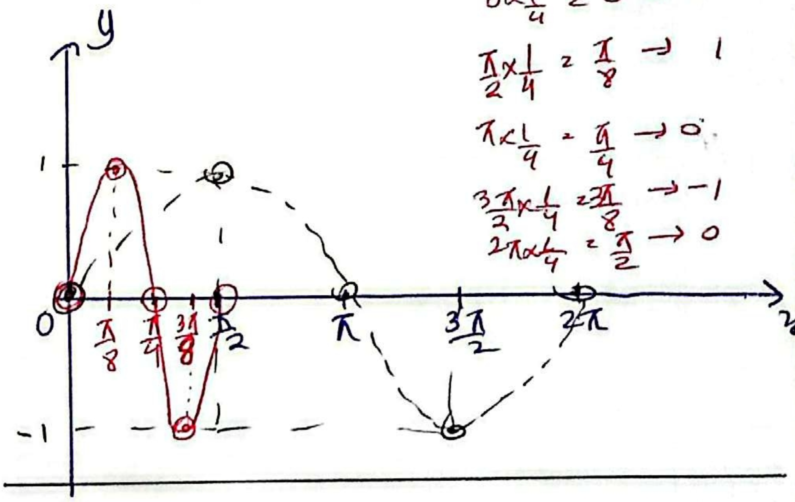
$0 \times \frac{1}{4} = 0 \to 0$

$\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} \to 1$

$\pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4} \to 0$

$\frac{3\pi}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3\pi}{8} \to -1$

$2\pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2} \to 0$

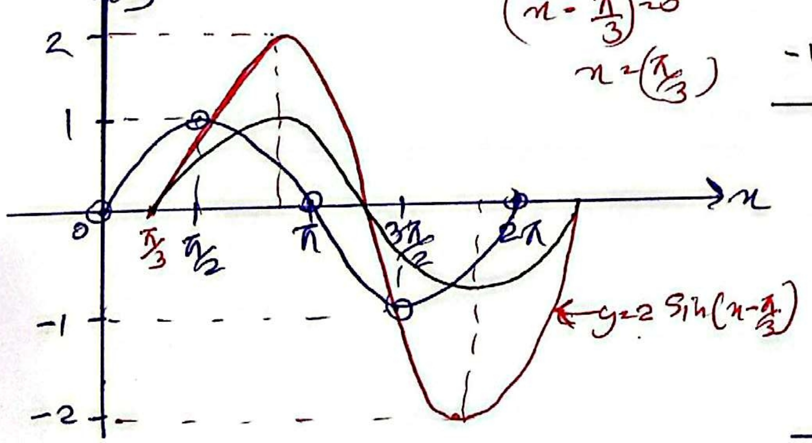


(v) $y = 2\sin(x - \frac{\pi}{3})$

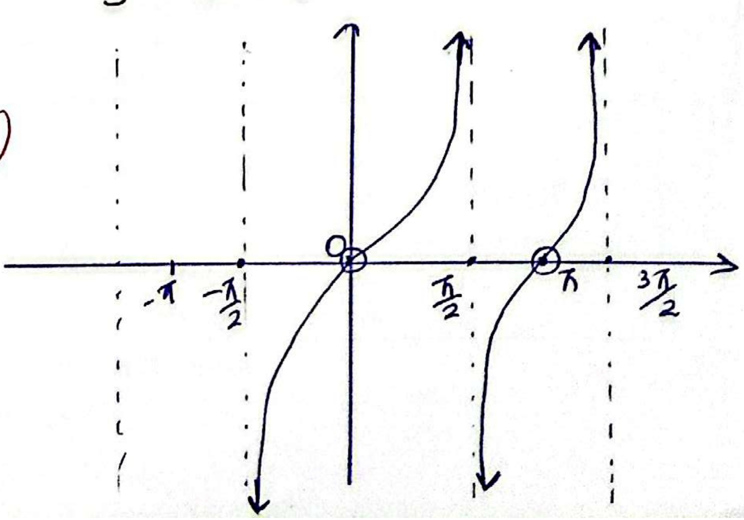
$y = \sin x$
$\downarrow$ $y = \sin(x - \frac{\pi}{3})$
$y = 2\sin(x - \frac{\pi}{3})$

$\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

$x = \left(\frac{\pi}{3}\right)$



$y = \tan x$



⑨ උපරිම, අවම මානවල ප්‍රස්තාර

$x \to 2\pi$

$3x \to \frac{2\pi}{3}$

$4x \to \frac{2\pi}{4}$

පියවර

① y හි උපරිම, අවම අගයන් සොයන්න, සීමාව ලකුණු කරගන්න.

② y උපරිම, අවම වන විට x අගය සොයන්න

③ ආවර්තය අනුව අවශ්‍ය නම් නව කෝණය කොටස් ලියන්න.

$x \to x + 2\pi$

$2x \to x + \pi$

④ $x=0$ විට y සොයන්න [y අක්ෂය හමුවන ස්ථානය]

$y=0$ විට x සොයන්න [x අක්ෂය හමුවන ස්ථානය]

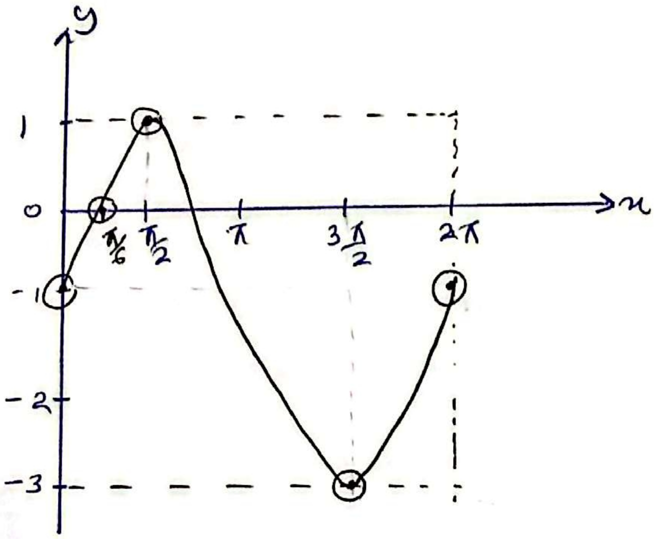
⑤ x වල පරාසයේ කෙළවර වලදී y අගය සොයන්න.

---

① $y = 2\sin x - 1$ $[0 \leq x \leq 2\pi]$

①/ $y_{උපරිම} = 2 \times 1 - 1$
$= 2 - 1$
$= 1$

$y_{අවම} = (2 \times -1) - 1$
$= -2 - 1$
$= -3$



②/ y උපරිම විට x

$\sin x = 1$
$x = \frac{\pi}{2}$

y අවම විට x

$\sin x = -1$
$x = -\frac{\pi}{2}$ ✗
$x = \frac{3\pi}{2}$ ✓

③/

④/ $x = 0$
$y = 2 \times 0 - 1$
$y = -1$

$y = 0$
$0 = 2\sin x - 1$
$\sin x = \frac{1}{2}$
$x = \frac{\pi}{6}$

⑤/ $x = 0$ ✓
$y = -1$

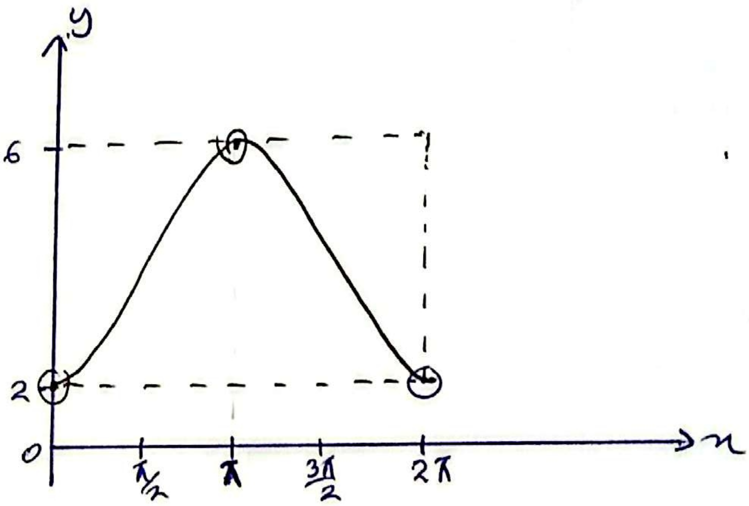
$x = 2\pi$
$y = 2\sin(2\pi) - 1$
$y = 2 \times (0) - 1$
$y = 0 - 1$
$y = -1$

---

② $y = 4 - 2\cos x$
$x \in (0, 2\pi)$ සඳහා
y ප්‍රස්තාරය දළ සටහන් කරන්න.

①/ $y_{උපරිම} = 4 - 2 \times (-1)$
$= 4 + 2$
$= 6$

$y_{අවම} = 4 - 2(1)$
$= 4 - 2$
$= 2$



②/ y උපරිම වන x

$\cos x = -1$
$\cos x = \cos(\pi - 0)$
$x = \pi$

y අවම වන x

$\cos x = 1$
$x = 0$

③/ $y = 2$
$x = 2\pi$

④/ $\cancel{x} = 0$ ✓
$y = 2$

$y = 0$
$\#$ [ඡේදනය නොවේ]

⑤/ $x = 0$
$y = 2$ ✓

$x = 2\pi$
$y = 2$ ✓

③ $y = 4\cos 2x - 2$

(I) $x \in [-\pi, \pi]$ සඳහා y හි ප්‍රස්තාරය දළ සටහන් කරන්න.

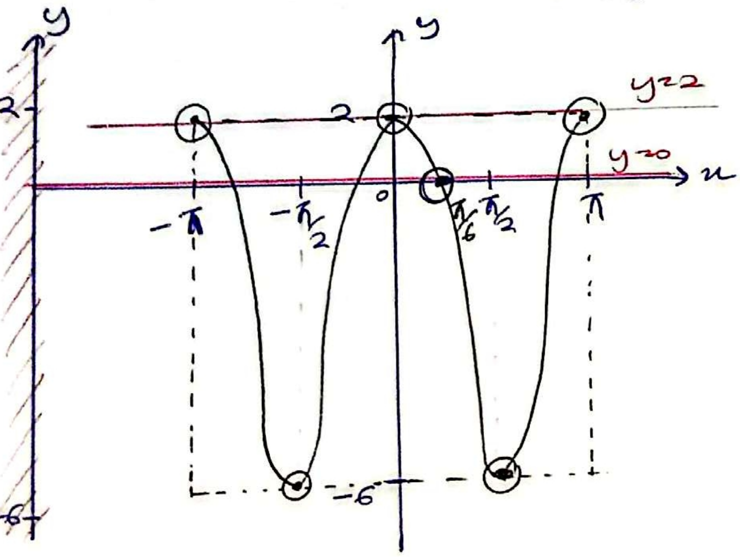
(II) එනයින්,

(a) $4\cos 2x - 2 = 0$

(b) $\cos 2x = 1$ සමීකරණ වලට විසඳුම් කීයක් පවතීදැයි සොයන්න

(I) $y = 4\cos 2x - 2$

① $y_{උපරිම} = 4(+1) - 2 = 4 - 2 = 2$ $\quad y_{අවම} = 4(-1) - 2 = -4 - 2 = -6$



② y උපරිම විට x

$\cos 2x = 1$

$2x = 0$

$x = 0$

y අවම විට x

$\cos 2x = -1$

$\cos 2x = \cos(\pi - 0)$

$2x = \pi$

$x = \frac{\pi}{2}$

③ $\underline{y = -6}$ $\quad x = -\frac{\pi}{2}$

④ $\underline{x = 0}$ $\quad y = 2$

$\underline{y = 0}$

$0 = 4\cos 2x - 2$

$\frac{1}{2} = \cos 2x$

$2x = \frac{\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{6}$

⑤ $\underline{x = \pi}$

$y = 4\cos 2\pi - 2$

$y = 4(1) - 2$

$y = 2$

$\underline{x = -\pi}$

$y = 4\cos(-2\pi) - 2$

$y = 4\cos 2\pi - 2$

$y = 2$

(II) (a) $y = 4\underbrace{\cos 2x - 2}_{=0}$

$y = 0$

විසඳුම් 4ක් ඇත.

(b) $\cos 2x = 1$

$y = 4 \times 1 - 2$

$y = 4 - 2$

$y = 2$

විසඳුම් 3ක් ඇත.

---

④ $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x + 2$ වේ.

(I) y හි උපරිම අවම අගයන් සොයන්න

(II) එනයින් $x \in [0, 2\pi]$ සඳහා y හි ප්‍රස්තාරය අඳින්න.

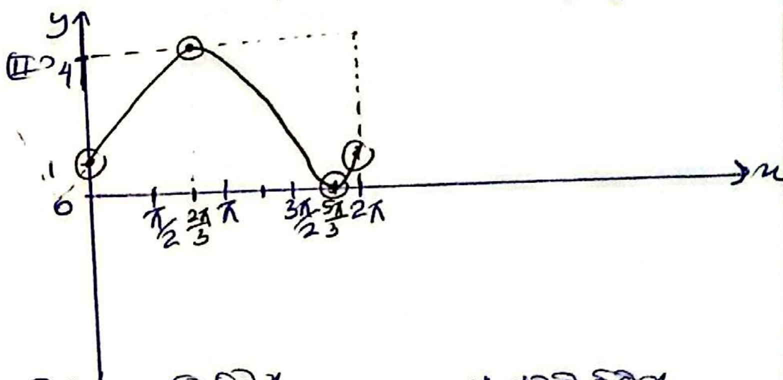
(I) $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x + 2$ $\qquad \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$= 2\left[\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{=\cos\frac{\pi}{6}}\sin x - \underbrace{\frac{1}{2}}_{=\sin\frac{\pi}{6}}\cos x\right] + 2$

$y = 2\left[\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right] + 2$

$y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2$

$y_{උපරිම} = 2(1) + 2 = 4$ $\quad y_{අවම} = 2(-1) + 2 = 0$



② y උපරිම විට x

$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$

$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

$x = \frac{4\pi}{6}$

$x = \frac{2\pi}{3}$

y අවම විට x

$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$

$x - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$

$x = \frac{10\pi}{6}$

$x = \frac{5\pi}{3}$

③

④ $\underline{x = 0}$

$y = -2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2$

$y = -2 \times \frac{1}{2} + 2$

$y = 1$

$\underline{y = 0}$

$-1 = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

$x - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$

$x = \frac{5\pi}{3}$

⑤ $\underline{x = 0}$ $\quad y = 1$

$\underline{x = 2\pi}$ $\qquad$ S A / T C

$y = -2 \times \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2$

$y = 1$

(1) $\sin^2 5^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin^2 15^\circ + \dots + \sin^2 90^\circ = 9 + \frac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න

$= \sin^2 5^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin^2 15^\circ + \dots + \sin^2 45^\circ + \dots + \sin^2 85^\circ + \sin^2 90^\circ$

$= \cos^2(90-5)^\circ + \cos^2(90-10) + \dots + \sin^2 45^\circ + \dots + \sin^2 85^\circ + \sin^2 90^\circ$

$= \cos^2 85^\circ + \cos^2 80^\circ + \dots + \sin^2 45^\circ + \dots + \sin^2 85^\circ + \sin^2 90^\circ$

$= 1 \times 8 + \sin^2 45^\circ + \sin^2 90^\circ$

$= 8 + 1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$= 8 + 1 + \frac{1}{2}$

$= 9 + \frac{1}{2}$ //

Δ ගැන ප්‍රශ්නවල ගැටළුවලදී අසමානතාවයක් ඔප්පු කිරීමට අදාළව ක්‍රමවේද 3 කි.

① වර්ග සමීකරණයක් ඇසුරෙන්
$\Delta \ge 0$

② පූර්ණ වර්ග ඇසුරෙන්
වර්ගජ ප්‍රකාශන ඇසුරෙන්,

$$E = \underbrace{\underbrace{(\ )^2}_{\ge 0} + 5}_{\ge 5}$$

③ sinθ cosθ වැනි ද ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිත භාවිතය

$$-1 \le \sin\theta \le 1$$
හෝ
$$-1 \le \cos\theta \le 1$$

2-10? $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + b = 0$ වන $b \in \mathbb{R}$ සඳහා $-\frac{3}{2} \le b \le \frac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න.

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x + \sin 2x + b = 0$$

$$\frac{\sin^2 2x}{2} - \sin 2x - (b+1) = 0$$

$$\sin^2 2x - 2\sin 2x - 2(b+1) = 0$$

පූර්ණ වර්ග කිරීම

$$(\sin 2x - 1)^2 - 1 - 2b - 2 = 0$$

$$\underbrace{(\sin 2x - 1)^2}_{\ge 0} = 3 + 2b$$

$$3 + 2b \ge 0$$

$$b \ge -\frac{3}{2} \quad \text{— (I)}$$

$(\sin 2x - 1)^2$ උපරිම අගය ගැනීමට

$\sin 2x$ අගය $\to -1$

$(\sin 2x - 1)^2$ = උපරිම

$$(-1-1)^2 = 4 \ge 3 + 2b$$

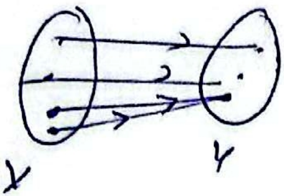
$$\frac{1}{2} \ge b \quad \text{— (II)}$$

(I) හා (II) න්,

$$-\frac{3}{2} \le b \le \frac{1}{2}$$

ප්‍රතිචිත්‍රණයකින් ශ්‍රිතයක් හඳුනාගැනීම

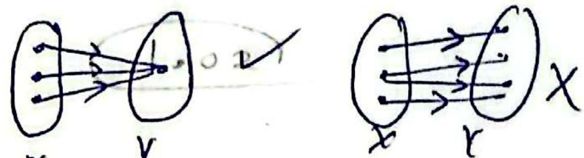
ශ්‍රිත



X කුලකයේ සෑම අවයවයක් සඳහා Y කුලකයේ එක් අවයවයක් බැගින් සම්බන්ධ වේ නම්, ශ්‍රිතයක් වේ.

X කුලකයේ සෑම අවයවයක්ම Y කුලකයේ එක අවයවයකට බැගින් සම්බන්ධ වී ඇත්නම්, එය ශ්‍රිතයකි.

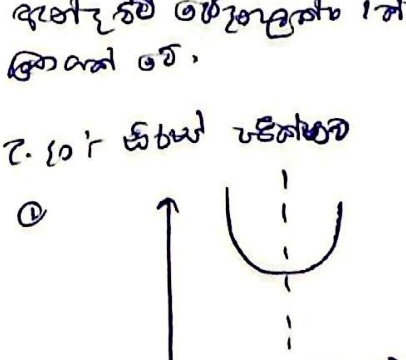
X කුලකයේ එකක් Y කුලකයේ කිහිපයකට සම්බන්ධ නම්, ශ්‍රිතයක් නොවේ.



* ප්‍රස්ථාරයක් ඇසුරෙන් ශ්‍රිතයක් දැයි පරීක්ෂා කිරීමට y අක්ෂයට සමාන්තර රේඛාවක් ඇඳි විට ඡේදන ලක්ෂ්‍ය 1 නම්, එය ශ්‍රිතයක් වේ.

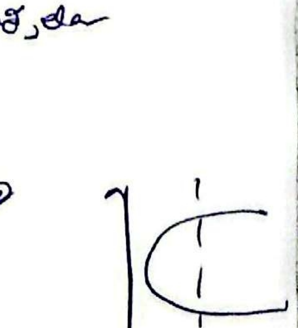
2-10? සිරස් රේඛා පරීක්ෂාව

①



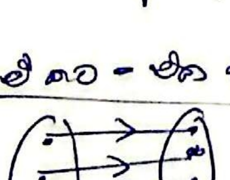
ශ්‍රිතයකි

②



ශ්‍රිතයක් නොවේ

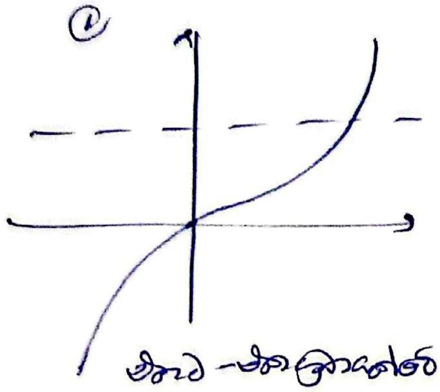
එකට - එක ශ්‍රිත



X කුලකයේ එක් එක් අවයවයකට Y කුලකයේ වෙනස් අවයවයක් බැගින් සම්බන්ධ වී ඇත්නම්, එය එකට එක ශ්‍රිතයකි.

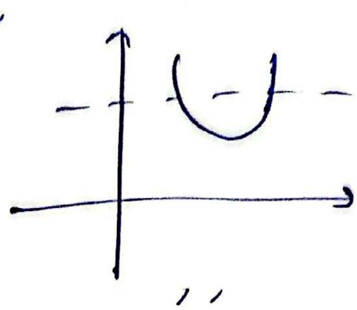
* y අක්ෂයේ අගයක් එකම එක
[illegible] දැයි පරීක්ෂා කිරීමට
x අක්ෂයට සමාන්තර රේඛාවක්
ඇඳ, වක්‍රය ඡේදනය වන්නේ 1 හි නම්,
එක - එකයි.

①



එකට - එක ශ්‍රිතයකි.

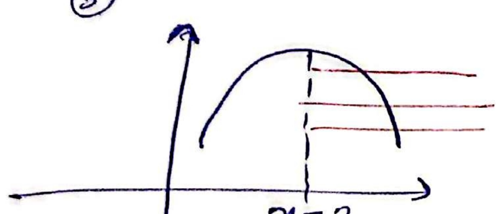
②



''

නැත.

③



① සියලු x සඳහා,
එකට - එක ශ්‍රිතයක් නොවේ
② $x > 3$ වැනි අගයන් සඳහා
එකට - එක ශ්‍රිතයකි
③ $x < 3$ විට
එකට - එක ශ්‍රිතයකි.